УДК 528.13

О ПОВЫШЕНИИ ТОЧНОСТИ ЗАПОЛНЯЮЩИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Струсь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцент

Пшидаток Саида Казбековна
к.с-х.н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

В работе рассмотрен вопрос повышения точности заполняющих геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами путем увеличения числа условных уравнений. Рассмотрены три варианта размещения дополнительно измеренных диагоналей четырехугольников. Приведены результаты повышения точности при определении координат точек внутри сети, за счет этих дополнительно измеренных элементов

Ключевые слова: СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, ОБРАТНЫЕ ВЕСА, ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, КООРДИНАТЫ

UDC 528.13

ON IMPROVING THE ACCURACY OF FILLING GEODETIC NETWORKS OF QUADRANGLES

Sokolov Yuriy Grigoryevich
Dr.Sci.Tech., professor

Strus Sergey Sergeyevich
Cand.Econ.Sci., associate professor

Pshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Econ.Sci., associate professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The article considers the issue of increasing the accuracy of filling geodetic networks of quadrangles with measured by the parties by increasing the number of conditional equations. We have considered the three variants of placement of additionally measured diagonals of the squares. The results improve the accuracy in the determination of coordinates of points within the network, due to these additional measured elements

Keywords: METHOD OF LEAST SQUARES, REVERSE WEIGHT, GEODETIC NETWORK, COORDINATES, ACCURACY ASSESSMENT

Вопросам уравнивания и оценки точности геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами посвящены работы [1,2], в которых разработан алгоритм составления условных уравнений, возникающих в сетях такого ряда и исследуется точность определения координат точек внутри сети, в том числе в наиболее слабом месте, на примере сети из фигур, близких к квадратам. Согласно работе [1] при составлении условных уравнений для сети из четырехугольников рекомендуется алгоритм:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{1.\text{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}-\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}--\right)\times A_j+\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}-\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}\right)\times B_j;\\
&\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{1.\text{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}-\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}\right)\times C_j+\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}-\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{1.\text{i}}}\right)\times D_j;\\
&\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{2.\text{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}-\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)\times A_j+\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}-\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)\times B_j;\\
&\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{2.\text{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \text{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}-\frac{\partial \text{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)\times C_j+\left(\frac{\partial \text{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}-\frac{\partial \text{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \text{S}_{2.\text{i}}}\right)\times D_j;\\
&\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{1.\text{i}}}\right)=\left(\frac{\sin\alpha_{2.j}}{\sin\gamma_j}\right);\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{1.\text{i}}}\right)=\left(-\frac{cos\alpha_{2.j}}{\sin\gamma_j}\right)\\
&\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{2.\text{i}}}\right)=\left(-\frac{\sin\alpha_{1.j}}{\sin\gamma_j}\right);\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \text{S}_{2.\text{i}}}\right)=\left(\frac{cos\alpha_{1.j}}{\sin\gamma_j}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1),$$

где: j – номер четырехугольника;

$X_{\text{ОП.j}}$, $Y_{\text{ОП.j}}$ – координаты определяемой точки в j-том четырехугольнике;

$X_{\text{П.j}}$, $X_{\text{Л.j}}$, $Y_{\text{П.j}}$, $Y_{\text{Л.j}}$ – координаты правой и левой точек в диагонали (по отношению к определяемой) в j-том четырехугольнике;

$S_{1.i}$, $S_{2.i}$ – измеренные длины сторон i-го четырехугольника, влияющие на определение координат определяемой точки в j-том четырехугольнике;

A_j, B_j, C_j, D_j – «передаточные коэффициенты», определяемые по формулам (2).

$$\left.\begin{aligned}
&A_j=\left(\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma}\times\cos\alpha_1\right)_j; \quad B_j=\left(\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma}\times\sin\alpha_1\right)_j;\\
&C_j=\left(-\frac{\cos\alpha_2}{\sin\gamma}\times\cos\alpha_1\right)_j; \quad D_j=\left(-\frac{\cos\alpha_2}{\sin\gamma}\times\sin\alpha_1\right)_j;
\end{aligned}\right\} \quad (2),$$

где: $\alpha_{1.j}$, $\alpha_{2.j}$ – дирекционные углы сторон $S_{1.j}$, $S_{2.j}$;

γ_j – угол засечки в j-том четырехугольнике.

Так для сети, (рис. 1) из фигур близких к квадратам, возникают 6 условных уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4} V_{1.1\mathrm{i}} + f_{s_{1.14}} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} V_{2.1\mathrm{i}} + f_{s_{2.41}} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{4} V_{1.2\mathrm{i}} + f_{s_{1.24}} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} V_{2.2\mathrm{i}} + f_{s_{2.42}} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{4} V_{1.3\mathrm{i}} + f_{s_{1.34}} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} V_{2.3\mathrm{i}} + f_{s_{2.43}} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3),

где: V – поправки к измеренным сторонам;

f_s – невязки в длинах сторон, вычисляемые по правилу $S_{изм} - S_{выч} = t_s$.

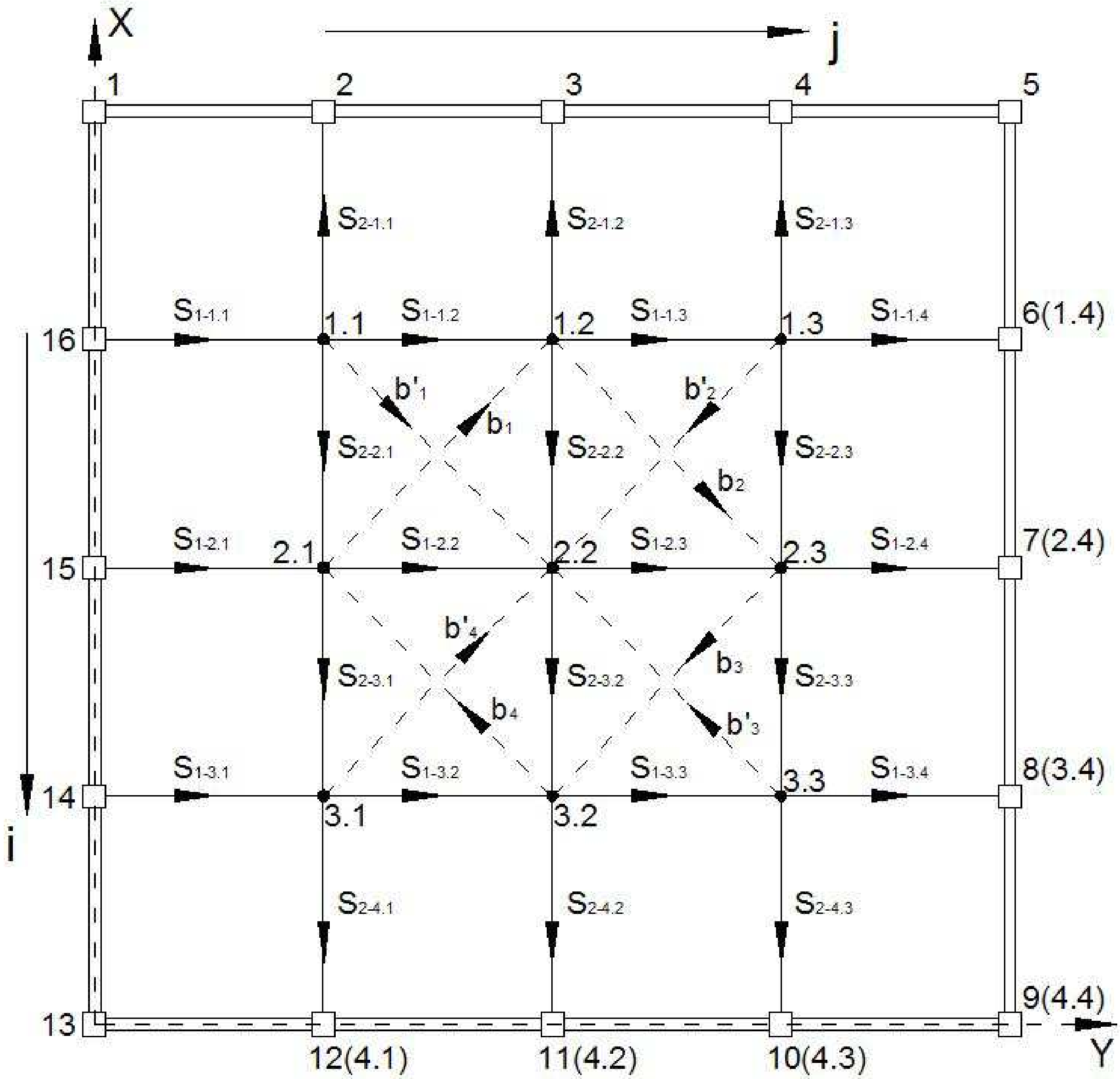

Рис. 1. Сеть из четырехугольников с измеренными сторонами

Здесь $S_{изм}$ – измеренная сторона, а $S_{выя}$ – вычисленная длина этой стороны.

Например, для стороны $S_{1.14}$ будем иметь:

$$S_{1.14} = \sqrt{\left(X_{1.4} - X_{1.3}\right)^2 + \left(Y_{1.4} - Y_{1.3}\right)^2} ,$$

где координаты $X_{1.3}$ и $Y_{1.3}$, полученые путем последовательного решения линейных засечек.

При добавлении к уравнениям (3) выражений весовых функций для координат 4-х точек: 2.2, 1.2, 2.1 и 1.1

$$\left.\begin{array}{ll} F_{X\,2.2} = -V_{2.12} - V_{2.2}; & F_{Y\,2.2} = V_{1.21} + V_{1.22}; \\ F_{X\,1.2} = -V_{2.12}; & F_{Y1.2} = V_{1.11} + V_{1.12}; \\ F_{X\,2.1} = -V_{2.11} - V_{2.21}; & F_{Y\,2.1} = V_{1.21}; \\ F_{X1.1} = -V_{2.11}; & F_{Y1.1} = V_{1.11}; \end{array}\right\} \qquad (4);$$

при решении полученной системы уравнений по способу наименьших квадратов для обратных весов этих точек были получены следующие значения:

$$\frac{1}{P_{2.2}} = 1{,}41; \qquad \frac{1}{P_{1.2}} = 1{,}32; \qquad \frac{1}{P_{2.1}} = 1{,}32; \qquad \frac{1}{P_{1.1}} = 1{,}22;$$

Средние квадратические погрешности определения положения этих точек вычисляют по известным формулам:

$$m = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}; \qquad (5);$$

Для равноточных измерений $\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{\gamma}};$ (6),

где: V – поправки к измеренным сторонам;

γ – число условных уравнения.

Интерес представляет анализ того, как изменяется точность определения координат точек сети при добавлении некоторых измеренных диагоналей квадратов. В этом случае каждой измеренной диагонали будет соответствовать условное уравнение. Например, для диагонали b_1 будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_{b1}-\left[\left(\frac{\partial_{X1.2}}{\partial_{S1.11}}-\frac{\partial_{X2.1}}{\partial_{S1.11}}\right)\cos\alpha_{b1}+\left(\frac{\partial_{Y1.2}}{\partial_{S1.11}}-\frac{\partial_{Y2.1}}{\partial_{S1.11}}\right)\sin\alpha_{b1}\right]V_{1.11}-\\
&-\left[\left(\frac{\partial_{X1.2}}{\partial_{S2.11}}-\frac{\partial_{X2.1}}{\partial_{S2.11}}\right)\cos\alpha_{b1}+\left(\frac{\partial_{Y1.2}}{\partial_{S2.11}}-\frac{\partial_{Y2.1}}{\partial_{S2.11}}\right)\sin\alpha_{b1}\right]V_{2.11}-\\
&-\left[\left(\frac{\partial_{X1.2}}{\partial_{S1.12}}-\frac{\partial_{X2.1}}{\partial_{S1.12}}\right)\cos\alpha_{b1}+\left(\frac{\partial_{Y1.2}}{\partial_{S1.12}}-\frac{\partial_{Y2.1}}{\partial_{S1.12}}\right)\sin\alpha_{b1}\right]V_{1.12}-\\
&-\ldots-\left[\left(\frac{\partial_{X1.2}}{\partial_{S2.21}}-\frac{\partial_{X2.1}}{\partial_{S2.21}}\right)\cos\alpha_{b1}+\left(\frac{\partial_{Y1.2}}{\partial_{S2.21}}-\frac{\partial_{Y2.1}}{\partial_{S2.21}}\right)\sin\alpha_{b1}\right]V_{2.21}+f_{b1}=0
\end{aligned}\right\} \quad (7),$$

где: α_{b1} - дирекционный угол диагонали b1;

f_{b1} - невязка в длине диагонали найденная по формуле:

$$f_{b1}=b_1-\sqrt{\left(X_{1.2}-X_{2.1}\right)^2+\left(Y_{1.2}-Y_{2.1}\right)^2} \quad (8),$$

где: b_1 – измеренное значение диагонали.

Дифференцируя (8) по измеренным сторонам влияющих на положение точек 1.2 и 2.1, согласно [1,2] получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{1(1.1)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{1(1.2)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{2(1.1)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\\
&\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{2(1.2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{1(2.1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\partial f_{b1}}{\partial S_{2(2.1)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};
\end{aligned}\right\} \quad (9);$$

После подстановки полученных частных производных (9) в выражение (7), получим:

$$\sqrt{2}V_{b1}-V_{1(1.1)}-V_{1(1.2)}-V_{2(1.1)}+V_{2(1.2)}+V_{1(2.1)}-V_{2(2.1)}+f_{b1}\sqrt{2}=0 \quad (10);$$

Для диагонали b2 будем иметь:

$$f_{b2}=b_2-\sqrt{\left(X_{2.3}-X_{1.2}\right)^2+\left(Y_{2.3}-Y_{1.2}\right)^2} \quad (11);$$

Дифференцируя (11) по всем измеренным сторонам, влияющих на положение точек 1.2 и 2.3, получим:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{1(1.1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(1.1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(1.2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\\ \dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(1.3)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{1(2.1)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(2.1)}}=0;\\ \dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(2.2)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(2.2)}}=0;\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{1(2.3)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\partial f_{b2}}{\partial S_{2(2.3)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{array}\right\} \quad (12);$$

После подстановки частых производных (12) в выражение (11), запишем:

$$\sqrt{2}V_{b2}+V_{1(1.1)}+V_{1(1.2)}+V_{2(1.2)}-V_{2(1.3)}-V_{1(2.1)}-V_{1(2.2)}-V_{1(2.3)}-V_{2(2.3)}+f_{b2}\sqrt{2}=0 \quad (13);$$

Аналогичным образом получим условные уравнения для диагоналей b_3 и b_4. Они будут иметь вид:

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{2}V_{b3}+V_{1(1.1)}-V_{2(1.2)}+V_{2(1.3)}-V_{2(2.2)}-V_{1(2.3)}+V_{2(2.3)}-V_{1(3.2)}-V_{2(3.2)}+f_{b3}\sqrt{2}=0\\ \sqrt{2}V_{b4}-V_{1(1.1)}+V_{2(1.1)}-V_{2(1.2)}+V_{2(2.1)}-V_{2(2.2)}-V_{1(3.2)}-V_{2(3.2)}+f_{b4}\sqrt{2}=0\end{array}\right\} \quad (14);$$

В результате решения системы условных уравнений (3) совместно с системой условных уравнений для диагоналей (10, 13,14) и добавляя к образовавшейся системе выражения для весовых функций (4) получим обратные веса для точек 1.1, 1.2, 2.1, 2.2:

$$\frac{1}{P_{1.1}}=1{,}0; \qquad \frac{1}{P_{1.2}}=1{,}09; \qquad \frac{1}{P_{2.1}}=1{,}09; \qquad \frac{1}{P_{2.2}}=1{,}29;$$

Назовем это решение вариантом №1.

В варианте №2 исследуем вопрос присоединения к условным уравнениям, возникающим при решении сети квадратов с диагоналями b'_1, b'_2, b'_3, $b'4_1$ (на рисунке 1 они показаны пунктирными линиями).

Используя ранее приведенный алгоритм, для этих диагоналей получим следующие условные уравнения:

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{2}V_{b'1}+V_{1(1.1)}+V_{2(1.1)}-V_{2(1.2)}-V_{1(2.1)}+-V_{1(2.2)}-V_{2(2.2)}+f_{b'1}\sqrt{2}=0\\ \sqrt{2}V_{b'2}-V_{1(1.1)}-V_{1(1.2)}-V_{2(1.2)}-V_{1(1.3)}+V_{2(1.3)}+V_{1(2.1)}+V_{1(2.2)}-V_{2(2.2)}+f_{b'2}\sqrt{2}=0\\ \sqrt{2}V_{b'3}+V_{2(1.2)}-V_{2(1.3)}+V_{1(2.1)}+V_{1(2.2)}+V_{2(2.2)}-V_{2(2.3)}-V_{1(3.1)}-V_{1(3.2)}-V_{2(3.3)}+f_{b'3}\sqrt{2}=0\\ \sqrt{2}V_{b'4}+V_{1(1.1)}-V_{2(1.1)}+V_{2(1.2)}-V_{2(2.1)}-V_{1(2.2)}+V_{2(2.2)}+V_{1(3.1)}-V_{2(3.1)}+f_{b'4}\sqrt{2}=0\end{array}\right\} \quad (15);$$

В результате решения по способу наименьших квадратов системы уравнений (3) совместно с системой (15) для обратных весов точек 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 получим следующие значения:

$$\frac{1}{P_{1.1}} = 0,96; \qquad \frac{1}{P_{1.2}} = 1,23; \qquad \frac{1}{P_{2.1}} = 1,23; \qquad \frac{1}{P_{2.2}} = 0,98; \qquad (16);$$

Рассмотрим и вариант №3 объединяющий варианты №1 и №2. Для точки 2.2 получим обратный вес, равный 0,81.

Используя обратные веса, были вычислены средние квадратические погрешности положения исследуемых точек по формуле (5), считая при этом, что μ для всех вариантов одинаковое.

Результаты рассмотренных вариантов сведены в таблице 1. (нулевой вариант – измеренных диагоналей нет)

№№ точек	Варианты			
	0	1	2	3
1.1	1.10	1.00	0.98	
1.2	1.15	1.04	1.11	
2.1	1.15	1.04	1.11	
2.2	1.19	1.14	0.99	0.90

Из таблицы видно, что увеличение числа условных уравнений путем добавления измеренных диагоналей приводят к увеличению точности определения положения точек внутри сети. Так при добавлении измеренных диагоналей по варианту №1 точки 1.1, 1.2 и 2.1 по сравнению с нулевым вариантом получили увеличение точности на 10%, а точка 2.2 лишь на 4%. По варианту №2, когда диагонали сходятся в точке 2.2 она получила увеличение точности порядка 18%, тогда как точки 1.2 и 2.1 получили увеличение точности лишь на 4%, а точка 1.1 на 12%. Третий вариант дал для точки 2.2 увеличение точности на 28-30%.

Следовательно, при составлении проектов геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами надо учитывать, где и какие диагонали надо проектировать для получения необходимой и достаточной точности.

Список литературы.

1. Ю.Г. Соколов, А.Т. Гаврюхов К вычислению коэффициентов условных уравнений при уравнивании заполняющих сетей из четырехугольников с измеренными сторонами // Научный журнал Труды КубГАУ, Краснодар, 2008 №15 - 8с.

2. Ю.Г. Соколов, С.С. Струсь, С.К. Пшидаток, Н.Я. Губанова. К вопросу оценки точности геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами. Научный журнал «Электронный ресурс – Краснодар», КубГАУ, 2014г., №98(04).

References

1. Ju.G. Sokolov, A.T. Gavrjuhov K vychisleniju kojefficientov uslovnyh uravnenij pri uravnivanii zapolnjajushhih setej iz chetyrehugol'nikov s izmerennymi storonami // Nauchnyj zhurnal Trudy KubGAU, Krasnodar, 2008 №15 - 8s.

2. Ju.G. Sokolov, S.S. Strus', S.K. Pshidatok, N.Ja. Gubanova. K voprosu ocenki tochnosti geodezicheskih setej iz chetyrehugol'nikov s izmerennymi storonami. Nauchnyj zhurnal «Jelektronnyj resurs – Krasnodar», KubGAU, 2014g., №98(04).