УДК 517.98: 330.4

01.00.00 Физико-математические науки

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРГОВЛИ МЕЖДУ КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКОЙ РЕСПУБЛИКОЙ И ХОЗЯЙСТВУЮЩИМИ СУБЪЕКТАМИ СЕВЕРО – КАВКАЗСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

Лайпанова Зульфа Мисаровна
к.ф.-м.н., доцент
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29

Урусова Аза Сейпуловна доцент
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29

Статья продолжает цикл проводимых ими исследований, связанных с формулировкой и разработкой методик построения неотрицательных решений обратных задач балансовых моделей (в данном случае, модель мировой торговли). Разработана методика построения неотрицательных решений изучаемых обратных задач. Эта методика основана на следующей схеме решения. Вначале формулируем постановку прямой задачи, затем постановку обратной. Далее, по заданным таблично решениям прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи квадратичного программирования, решения которой определяются в среде MS Excel. Теоретический материал сопровождается решением конкретного примера, используя статистические данные Карачаево-Черкесской республики, который показывает, как на практике можно решать обратную задачу, т.е. организовать процесс сбалансированной торговли Карачаево-Черкесской республики с хозяйствующими субъектами Северо-Кавказского федерального округа. Найдены неотрицательные элементы матрицы, по которым можно судить, какую долю национального дохода, $n-$й субъект должен тратить на покупку товаров в Карачаево-Черкесской республике, чтобы торговля между этой парой была сбалансированной. Итак, обратную задачу, поставленную применительно к торгующим странам, можно ставить и решать указанным ниже способом и к торгующим между собой субъектам одной страны

UDC 517.98: 330.4

Physical-Mathematical sciences

ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL OF TRADE BETWEEN KARACHAY-CHERKESS REPUBLIC AND ECONOMIC ENTITIES OF THE NORTH CAUCASIAN FEDERAL DISTRICT

Laipanova Zulfa Misarovna
candidate of Phys.-M. D., associate Professor
Karachay-Chercassian state University. U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia, Lenina str., 29

Urusova Aza Saipulovna
associate Professor
Karachay-Chercassian state University. U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia, Lenina str., 29

The article by continues the cycle of their studies related to the formulation and development of methods of constructing non-negative solutions of inverse problems of balance models (in this case, the model of world trade). Method of constructing nonnegative solutions of the studied inverse problems is developed. This technique is based on the following scheme of the solution. Initially we convinced of a correct formulation of the direct problem, then of the solvability of the inverse. Further, by specified tabular solutions of the direct problem, a system of algebraic equations containing the unknown, the estimated parameters of the studied model is built. Then the inverse problem reduces to solving the following quadratic programming, the solution of which is determined in MS Excel. The theoretical material is accompanied by solution of specific example, using statistical data of the Karachay-Cherkess Republic that shows how actually in practice it is possible to solve the inverse problem, i.e. to organize a process of balanced trade of the Karachay-Cherkess Republic with each of the subjects of Noth – Caucasion Federal District. Found the non-negative elements of a matrix, by which we can judge what proportion of national income, y, the subject has to spend on the purchase of goods in the Karachay-Cherkess Republic, to trade between this pair was balanced. So, the inverse problem posed in relation to the trading countries, it is possible to put and solve the following method and to trade between the subjects of one country

Ключевые слова: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МОДЕЛЬ, ТОРГОВЛЯ

Keywords: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS, DIFFERENTIAL EQUATIONS, QUADRATIC PROGRAMMING, MODEL, TRADE

Введение

В данной статье сформулирована обратная задача в математической модели мировой торговли[5].

Метод решения проиллюстрирован на статистическом материале по Северо-Кавказскому округу[3].

Для этой модели предложен метод решения обратной задачи, основанный на сведении обратной задачи к задаче квадратичного программирования.

Задачу квадратичного программирования предлагается решать инструментальными средствами: с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

Цель проведённого исследования – разработать методы решения обратных задач математических моделей макро – и микроэкономики и использовать полученные результаты для анализа и прогноза развития экономики Северо-Кавказского федерального округа в целом и Карачаево-Черкесской республики, в частности.

Постановка задачи

Математическая модель сбалансированной мировой торговли между странами имеет вид [5]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где x_i – национальный доход i - ой страны, $i = 1, \cdots, n$, a_{ij} – доля (часть) национального дохода, которую j - я страна тратит на закупку товаров в i - ой стране.

Очевидно, $x_i \geq 0, \quad a_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \cdots, n.$ Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

Условие (2) показывает ту часть национального дохода j - ой страны, которая тратится (уходит) на внешнюю торговлю с другими странами.

Согласно [1] модель (1) позволяет по заданным a_{ij} определять $x_i, i = 1, \ldots, n$.

Кроме того, заметим, что модель (1) применима не только к группе торгующих стран, но и к группе торгующих субъектов внутри одной страны.

Это означает, что обратную задачу, поставленную применительно к торгующим странам, можно ставить и решать указанным ниже способом и к торгующим между собой субъектам одной страны.

В данной статье представлены результаты исследования следующей задачи: используя сравнительные данные валового продукта (в млн. руб.) по регионам Северо-Кавказского федерального округа (СКФО) за 2012 год, приведённые в таблице 1. организовать сбалансированную торговлю между парами хозяйствующих субъектов Северо-Кавказского федерального округа (СКФО) и, в частности, торговлю Карачаево-Черкесской республики с хозяйствующими субъектами СКФО.

Таблица 1. Валовый продукт в млн. руб. субъектов СКФО в 2012 году

	Северо-Кавказский федеральный округ	**1064842,8**
1	Карачаево-Черкесская Республика	49605,4
2	Чеченская Республика	86319,5
3	Республика Дагестан	327030,8
4	Республика Ингушетия	26112,8
5	Кабардино-Балкарская	90634,8

	Республика	
6	Республика Северная Осетия - Алания	85192,1
7	Ставропольский край	399947,4

Введём обозначения:

x_i – национальный доход $i-$ го субъекта, $i=1,\ldots,7$, a_{ij} – доля (часть) дохода, которую $j-$й субъект, тратит на закупку товаров в $i-$ м субъекте,

$$x=\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

Тогда математическая модель сбалансированной мировой торговли между странами (регионами) будет иметь вид [2]:

$$Ax=x. \tag{3}$$

Очевидно, $x_i \geq 0,\ \ a_{ij} \geq 0,\ \ i,j=1,\cdots,7$, и, кроме того, выполняются условия

$$\begin{cases} a_{ii}+a_{ji} \leq 1, \\ a_{ij}+a_{jj} \leq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Метод решения поставленной задачи

Поставленная задача может быть сведена к задаче квадратичного программирования: по заданному вектору x найти матрицу A с неотрицательными элементами, удовлетворяющими условиям (2), которая доставляет минимум выражению

$$\left|(E-A)x\right|^2,$$

где $E-$ единичная матрица размера 2×2, т.е. к задаче квадратичного программирования [3]:

$$\left|(E-A)x\right|^2 \to \min_A, \quad A \ge 0, \quad \begin{cases} a_{ii} + a_{ji} \le 1, \\ a_{ij} + a_{jj} \le 1. \end{cases} \tag{5}$$

В более подробной записи (5) имеет вид:

$$[(1-a_{ii})x_i + a_{ij}x_j]^2 + (a_{ji}x_i + (1-a_{jj})x_j]^2 \to \min_{a_{ij}}, \quad a_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1, \cdots, 7. \ . \tag{6}$$

Согласно данным, приведённым в таблице1, по заданным x,

где $x = (49605,4 \quad 86319,5 \quad 327030,8 \quad 26112,8 \quad 90634,8 \quad 85192,1 \quad 399947,4)^T$

($T-$ операция транспонирования), найдём неотрицательные элементы матрицы A.

Задача сбалансированной торговли Карачаево-Черкесской республики (№1 в таблице 1) с парами хозяйствующих субъектов Северо-Кавказского федерального округа СКФО, имеющие номера сводится к решению шести задач квадратичного программирования:

$$\begin{aligned}
&[(1-a_{11})49605,4 + 86319,5a_{12}]^2 + [49605,4a_{21} + (1-a_{22})86319,5]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&[(1-a_{11})49605,4 + 327030,8a_{13}]^2 + [49605,45a_{31} + (1-a_{33})327030,8]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&[(1-a_{11})49605,4 + 26112,8a_{14}]^2 + [49605,4a_{41} + (1-a_{44})26112,8]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&[(1-a_{11})49605,4 + 90634,8a_{15}]^2 + [49605,4a_{51} + (1-a_{55})90634,8]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&[(1-a_{11})49605,4 + 85192,1a_{16}]^2 + [49605,4a_{61} + (1-a_{66})85192,1]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&[(1-a_{11})49605,4 + 399047,4a_{17}]^2 + [49605,4a_{71} + (1-a_{77})399047,4]^2 \to \min_{a_{ij}}, \\
&a_{ii} \ge 0, a_{ij} \ge 0, a_{ji} \ge 0, a_{jj} \ge 0, \quad a_{ii} + a_{ji} \le 1, \quad a_{ij} + a_{jj} \le 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решая задачи (7) с помощью средств Microsoft Excel [4], находим неотрицательные элементы матриц:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,28 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,076 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,35 & 0,34 \end{pmatrix}, \quad A_{15} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,27 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,29 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \ A_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0,12 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_{1n}, $n = 1, 2, \ldots, 7$, позволяют судить, какую долю национального дохода, $n-$й субъект должен тратить на покупку товаров в Карачаево-

Черкесской республике, чтобы торговля между этой парой была сбалансированной.

Так, например, обращаясь к первому столбцу матрицы A_{12}(в первом столбце, согласно данным таблицы 1 и обозначению a_{ij}, расположены данные по торговле Карачаево-Черкесской Республики с Чеченской Республикой) заключаем, что доля дохода, которую Карачаево-Черкесия должна тратить на закупку товара в Чеченской Республике должна составлять (при сбалансированной торговле) $a_{21} = 0,5$, а доля дохода, которую Карачаево-Черкесия должна тратить на закупку товара внутри своей республики $- a_{11} = 0,5$.

Аналогично, обращаясь ко второму столбцу матрицы A_{12}, заключаем, что при сбалансированной торговле Чеченской Республики с Карачаево-Черкесской республикой, доля дохода, которую субъект должен тратить на закупку товаров в КЧР, должна составлять $a_{12} = 0,28$, а доля внутренних закупок в республике $- a_{22} = 0,5$.

Далее обращаясь к первому столбцу матрицы A_{13} (в первом столбце, согласно данным таблицы 1 и обозначению a_{ij}, расположены данные по торговле Карачаево-Черкесской Республики с Республикой Дагестан) заключаем, что доля дохода, которую Карачаево-Черкесия должна тратить на закупку товара в Республике Дагестан должна составлять (при сбалансированной торговле) $a_{21} = 0,5$ а доля дохода, которую Карачаево-Черкесия должна тратить на закупку товара внутри своей республики – $a_{11} = 0,5$.

Аналогично, обращаясь ко второму столбцу матрицы A_{13}, заключаем, что при сбалансированной торговле Республики Дагестан с Карачаево-Черкесской республикой, доля дохода, которую субъект должен тратить на закупку товаров в КЧР, должна составлять $a_{12} = 0,076$, а доля внутренних закупок в республике – $a_{22} = 0{,}5$ и так далее.

Результаты, проведённых вычислений приведены на рис. 1. – 6.

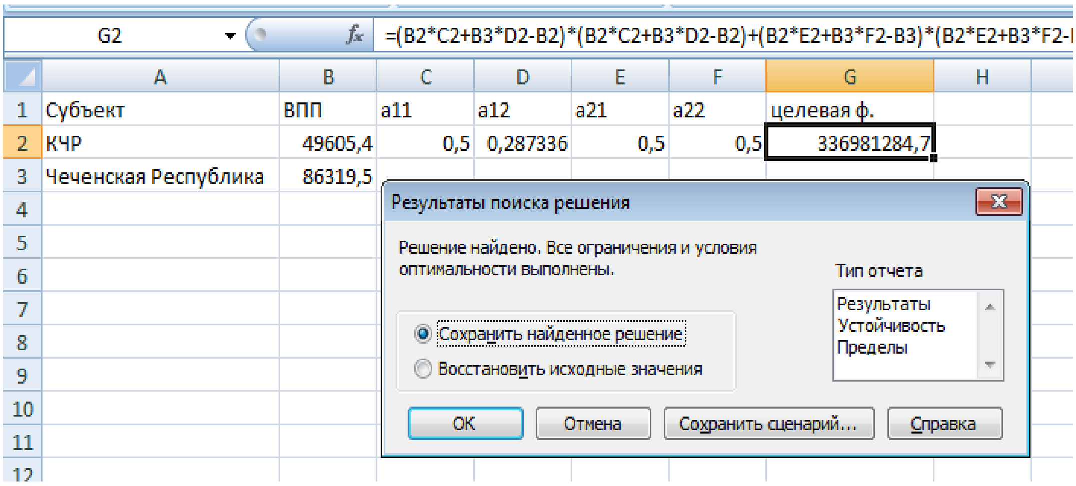

Рис.1. Решение задачи для КЧР с Чеченской Республикой

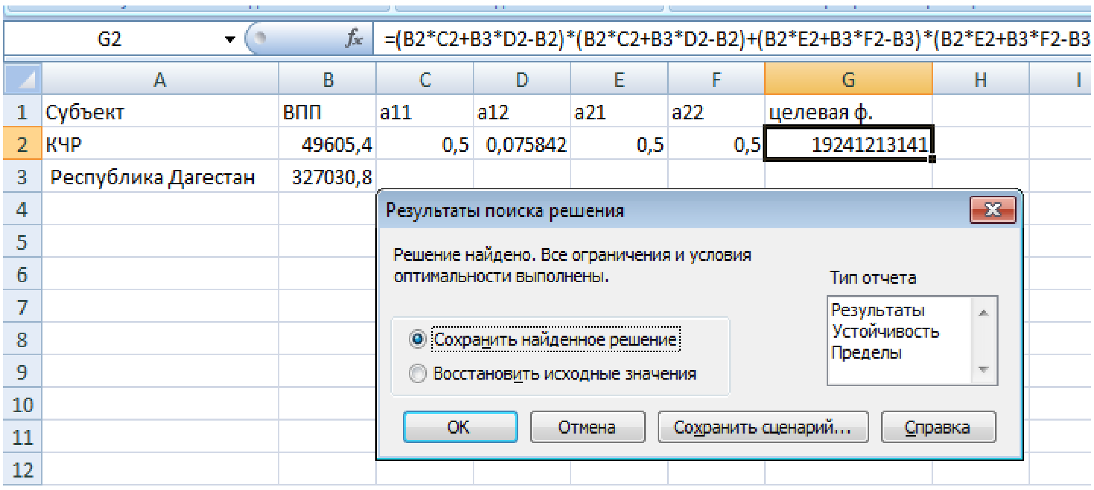

Рис.2. Решение задачи для КЧР с Республикой Дагестан

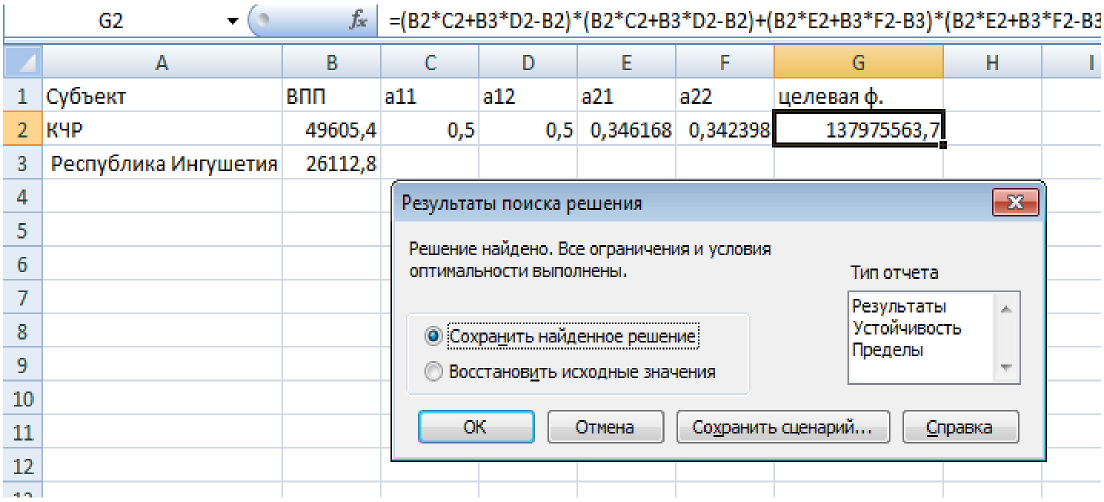

Рис.3. Решение задачи для КЧР с Республикой Ингушетия

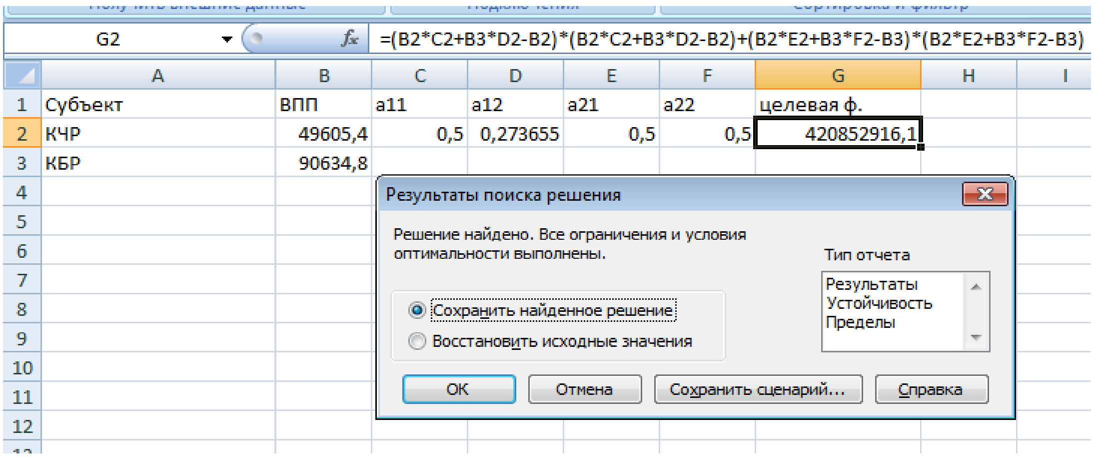

Рис.4. Решение задачи для КЧР с КБР

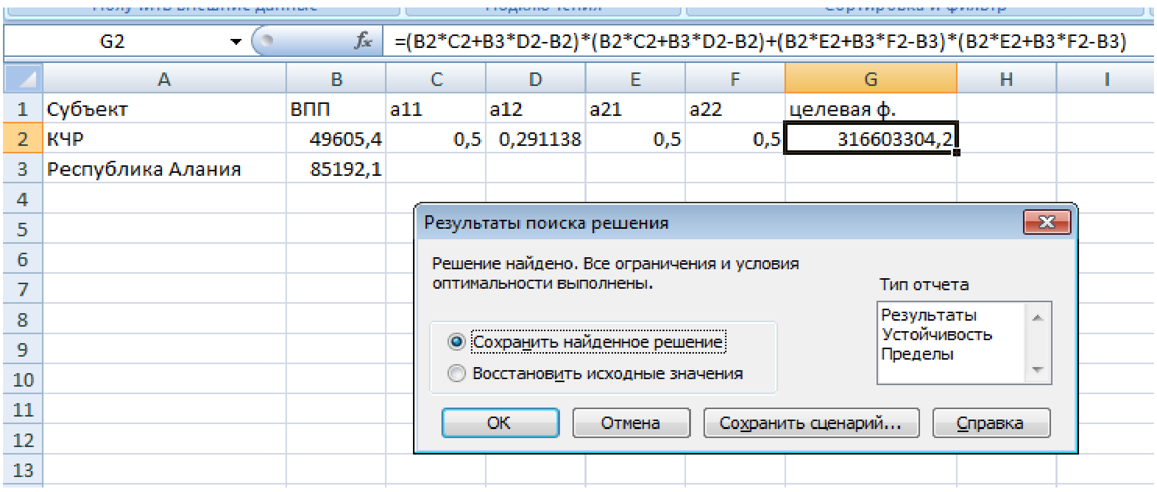

Рис.5. Решение задачи для КЧР с Аланией

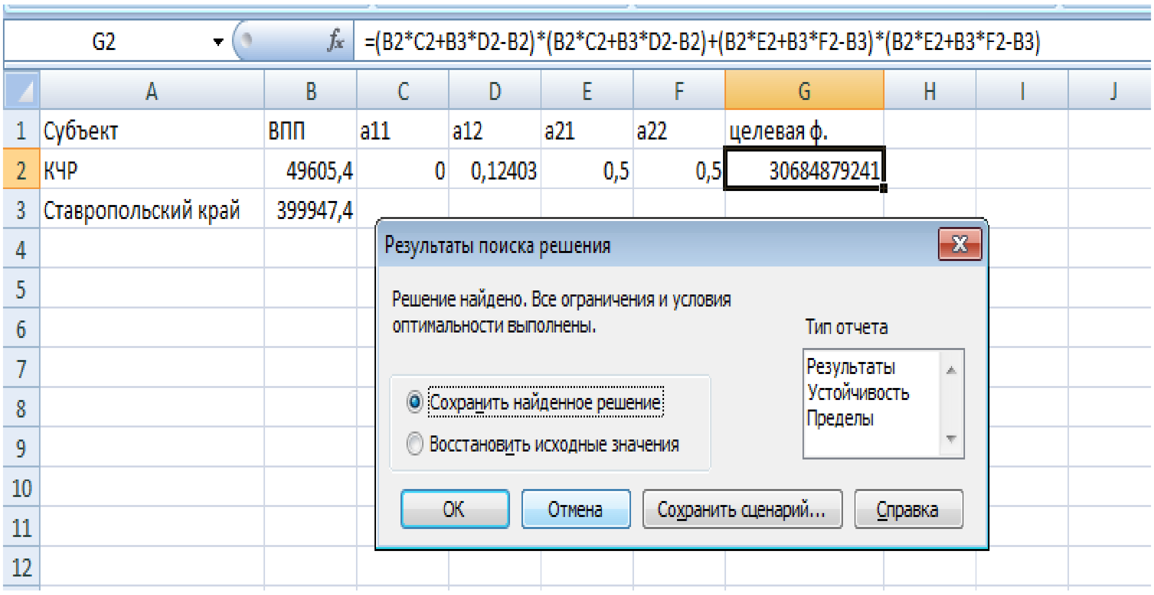

Рис.6. Решение задачи для КЧР со Ставропольским краем

Обратим внимание, что получаемое решение a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, обратной задачи, вообще говоря, не является единственным, а зависит от множества значений переменных (параметров) a_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условиям:

1) выполняется условия $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$;

2) выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, $j = 1, \dots, n.$,

где a_{ii} *при* $i = 1, \dots, n$, имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11} = 1 - \dfrac{1}{x_1}[a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n], \\ a_{22} = 1 - \dfrac{1}{x_2}[a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{nn} = 1 - \dfrac{1}{x_n}[a_{n1}x_1 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1}]. \end{cases}$$

3) выполняются условия

$$|a_{11}|>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{vmatrix}>0,$$

то данные a_{ij} являются решением рассматриваемой обратной задачи.

Это даёт возможность экспертам каждой из n торгующих стран налагать на a_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1,\ldots,n$, в дополнение к условиям 1) – 3), свои ограничения, исходя из специфических экономических условий каждой торгующей страны.

Выводы

1. Построена экономико-математическая модель торговли между Карачаево-Черкесской республикой и каждым хозяйствующим субъектом Южного федерального округа.
2. Найдены неотрицательные элементы матрицы, по которым можно судить, какую долю национального дохода, $n-$й субъект должен тратить на покупку товаров в Карачаево-Черкесской республике, чтобы торговля между этой парой была сбалансированной.
3. Задача квадратичного программирования решена инструментальными средствами: с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремер Н.Ш. и др Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов специальностям -3-е издание – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
2. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение

расчётов в среде EXCEL: Практикум: Учеб. пос. для вузов – М.: Финстатинформ, 2000.
3. РСО-Алания в цифрах, 2014: Краткий статистический сборник/ Северная Осетиястат – Владикавказ, 2014 -268 стр.
4. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144с.
5. Семенчин Е.А., Урусова А.С. Сведение обратной задачи в математической модели мировой торговли к задаче квадратичного программирования**:** Обозрение прикладной и промышленной математики,- Редакция журнала «ОПиПМ», – М., 2007. – с.363 – 364.

REFERENCES

1. Kremer N. W. and others mathematics for economists: textbook for University students professions -3rd edition – M.: UNITY-DANA, 2007. – P 479.
2. Orlova I. V. Economic-mathematical methods and models. Performing calculations in an EXCEL environment: Workshop: Proc. textbook for universities. M.: Finstatinform, 2000.
3. Of North Ossetia-Alania in the numbers, 2014: Brief data book/ North Sitestat – Vladikavkaz, 2014 - P 268
4. Orlova I. V. Economic and mathematical modeling. – M.: high school textbook, 2005. – P.144.
5. Semenchin E. A., Urusova A. S. Note the inverse problem in the mathematical model of world trade to the quadratic programming problem: a Review of applied and industrial mathematics - Editorial Board "OPIM", – M., 2007. – P.363 – 364.