

УДК 528.117

25.00.00 Науки о Земле

**К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КООРДИНАТ В ЗАДАЧЕ ГАНЗЕНА**Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессорГурский Иван Николаевич
доцентСтрусь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцентПшидаток Саида Казбековна
к.с.-х.н., доцент
*Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия*

В последнее время широкое применение для определения координат точек получили спутниковые методы, которые позволяют, не имея взаимной видимости между определяемыми точками, находить их координаты. Однако в отдельных случаях, например в лесных массивах, в городских застройках применение этих методов становится проблематичным и проще применять традиционные методы. В статье рассмотрен случай использования метода расчета координат по «задаче Ганзена» и проведена оценка точности определения координат точек. В некоторых работах даются только рекомендации, что наиболее точные результаты получаются, когда рассматриваемая фигура построения по форме близка к квадрату. В нашем случае на основании полученных формул проведен анализ влияния длины определенного базиса и его удаленности от исходной стороны на точность определения координат исходных точек. Вывод состоит в том, что точность определения координат искомых точек зависит от соотношения длины исходного базиса и исходной линии. При этом оптимальной может считаться удаленность, равная 0,3-0,6 от длины исходной линии. Проведенные в работе исследования могут с успехом использоваться при составлении проектов геодезической привязки полигонометрических ходов и сетей сгущения

Ключевые слова: ЗАДАЧА ГАНЗЕНА, УСЛОВНЫЙ БАЗИС, ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, КООРДИНАТЫ

UDC 528.117

Earth sciences

**HOW TO ESTIMATE THE ACCURACY OF
DETERMINING THE COORDINATES IN THE
APPROACH OF HANSEN**Sokolov Yuriy Grigoryevich
Cand.Tech.Sci., professorGurskiy Ivan Nikolaevich
Associate professorStrus' Sergey Sergeyeovich
Cand.Econ.Sci., associate professorPshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Agr.Sci.
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Recently, there have been satellite-based methods widely used to determine the coordinates of points, which allow, without mutual visibility between points, to pursue their coordinates. However, in some cases, for example in forests, in urban buildings the application of these methods becomes a problem and it is easier to apply traditional methods. The article describes the case of using the method of calculation of coordinates for "the approach of Hansen" and held to evaluate the accuracy of determining the coordinates of the points. Some studies provide only recommendation guidelines that the most accurate results are obtained when the shape of the building is shaped similar to a square. In our case, on the basis of obtained formulae we had an analysis of the influence of the length of the corresponding base, and its distance from the source side on the accuracy of determination of coordinates of the original points. The conclusion is that the accuracy of determination of coordinates of required points depends on the ratio of the length of the original basis and the baseline. The optimal can be considered the distance equal to 0.3-0.6 of the length of the baseline. The holding data in the study can successfully be used for the drafting of geodetic reference polygonometries moves and thickening of networks

Keywords: APPROACH OF HANSEN, CONDITIONAL BASIS, GEODETIC NETWORK, COORDINATES, ACCURACY ASSESSMENT

Вопросу решения задачи Ганзена для привязки двух точек по двум исходным с известными координатами посвящено ряд работ [1,2]. Наибо-

лее простым ее решением, по нашему мнению, является способ условного базиса (Рисунок 1).

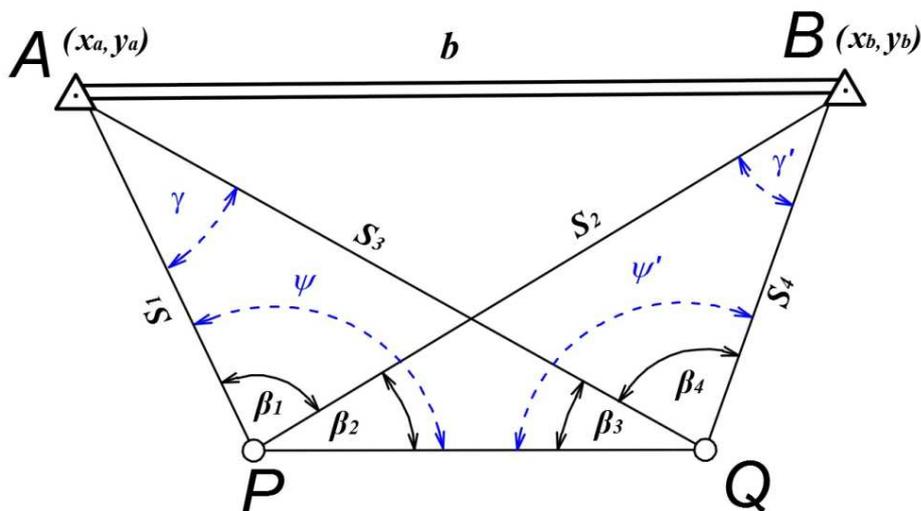


Рисунок 1. Схема геодезических пунктов, углов и сторон для решения задачи Ганзена

На рисунке 1 показаны измеренные углы β_1, β_2 , на точке P и углы β_3, β_4 на точке Q . Известны координаты пунктов $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$. Для решения треугольников AQP и BQP целью вычисления сторон S_1, S_2, S_3 , и S_4 необходим линейный элемент (сторона PQ). В общем случае принята условная длина $PQ = 1$ м.

Тогда по теореме синусов, согласно способу условного базиса, находят условные длины сторон S'_1, S'_2, S'_3 , и S'_4 . В результате получают:

$$S'_1 = \frac{\sin \beta_a}{\sin(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} = \frac{\sin \beta_3}{\sin \gamma}, \tag{1}$$

$$S'_a = \frac{\sin[(\beta)_1 + \beta_2]}{\sin(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} = \frac{\sin \psi}{\sin \gamma}, \tag{2}$$

$$S'_2 = \frac{\sin[(\beta)_3 + \beta_4]}{\sin(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4)} = \frac{\sin \psi'}{\sin \gamma'}, \tag{3}$$

$$S'_4 = \frac{\sin \beta_b}{\sin(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4)} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma'}, \tag{4}$$

Здесь: $\beta_1 + \beta_2 = \psi$; $\beta_3 + \beta_4 = \psi'$; $\gamma = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$; $\gamma' = 180^\circ - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4)$.

Далее находят масштабный коэффициент K , из треугольника ABP , по формуле:

$$K = \frac{b}{b'} = \frac{b}{\sqrt{S_1'^2 + S_2'^2 - 2S_1'S_2'\cos\beta_1}}; \quad (5)$$

и для контроля вычисляют этот коэффициент из треугольника ABQ

$$K = \frac{b}{b'} = \frac{b}{\sqrt{S_3'^2 + S_4'^2 - 2S_3'S_4'\cos\beta_4}}; \quad (6)$$

где: b – длина исходной стороны AB вычисленная по координатам решением обратной геодезической задачи (ОГЗ).

$$b = \sqrt{[(x)_b - x_a]^2 + (y_b - y_a)^2}; \quad (7)$$

Выводя среднее значение масштабного коэффициента, вычисляют фактические длины сторон треугольников по формуле:

$$S = KS_i'; \quad (8)$$

Координаты искоемых точек P и Q вычисляют по формулам линейной засечки [2].

Существенным недостатком в рассматриваемых научных статьях и литературе способах решения задачи Ганзена является отсутствие оценки точности полученных результатов координат точек P и Q . В некоторых работах даются только заключения, что наиболее точные результаты получаются, когда рассматриваемая фигура по определению координат в этой задаче близка к квадрату.

Нами предлагается проводить оценку точности по измеренным углам между сторонами образующими линейную засечку и по вычисленным фактическим значениям этих сторон.

Учитывая, что масштабный коэффициент K для всех сторон одинаков, находят частные производные по измеренным углам для сторон S_1 и S_2 .

$$\frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} = \frac{\cos\beta_2 \sin\gamma - \cos\gamma \sin\beta_2}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin(\gamma - \beta_2)}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin\psi}{\sin^2\gamma} = \frac{S_2}{\sin\gamma}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} = \frac{-\cos\gamma \sin\beta_2}{\sin^2\gamma} = -S_1 \operatorname{ctg}\gamma, \quad (10)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \beta_2} = \frac{-\cos\gamma \sin\beta_2}{\sin^2\gamma} = -S_1 \operatorname{ctg}\gamma, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \beta_2} = \frac{-[\cos(\beta_3 + \beta_2 + \beta_4) \cdot \sin(\beta_3 + \beta_4)]}{\sin^2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_4)} = -\frac{\cos\gamma' \sin\psi'}{\sin^2\gamma'} = -S_2 \operatorname{ctg}\gamma', \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial \beta} \right]_{13} / \left[\frac{\partial \beta}{\partial \beta} \right]_{13} = \left([\cos(\beta)_{13} + \beta_{14}] \cdot \sin\gamma' - \cos\gamma' \sin\psi' \right) / ([\sin]^2 \gamma') = \sin(\gamma' - \psi') / ([\sin]^2 \gamma'), \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial \beta} \right]_{14} / \left[\frac{\partial \beta}{\partial \beta} \right]_{14} = \left([\cos(\beta)_{13} + \beta_{14}] \cdot \sin\gamma' - \cos\gamma' \sin\psi' \right) / ([\sin]^2 \gamma') = \sin(\gamma' - \psi') / ([\sin]^2 \gamma'), \quad (14)$$

Аналогичным образом получают частные производные для сторон S_3 и S_4 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_3}{\partial \beta_1} = \frac{S_1}{\sin\gamma}; \quad \frac{\partial S_3}{\partial \beta_2} = \frac{S_1}{\sin\gamma}; \quad \frac{\partial S_3}{\partial \beta_3} = -S_3 \operatorname{ctg}\gamma; \\ \frac{\partial S_4}{\partial \beta_2} = \frac{S_2}{\sin\gamma'}; \quad \frac{\partial S_4}{\partial \beta_3} = -S_4 \operatorname{ctg}\gamma'; \quad \frac{\partial S_4}{\partial \beta_4} = -S_4 \operatorname{ctg}\gamma' \end{aligned} \right\}; \quad (15)$$

Тогда средние квадратические погрешности (СКП) определения сторон S_1 и S_2 будут:

$$m_{S_1}^2 = \left(\frac{S_1}{\sin\gamma} \right)^2 \frac{m_{\beta_1}^2}{\rho^2} + [([S]_1 \operatorname{ctg}\gamma)]^2 \frac{m_{\beta_2}^2}{\rho^2} + [([S]_1 \operatorname{ctg}\gamma)]^2 \frac{m_{\beta_3}^2}{\rho^2}; \quad (16)$$

$$m_{S_2}^2 = [([S]_2 \operatorname{ctg}\gamma')]^2 \frac{m_{\beta_2}^2}{\rho^2} + \left(\frac{S_4}{\sin\gamma'} \right)^2 \frac{m_{\beta_3}^2}{\rho^2} + \left(\frac{S_4}{\sin\gamma'} \right)^2 \frac{m_{\beta_4}^2}{\rho^2}; \quad (17)$$

Полагая, что $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_{\beta_3} = m_{\beta_4} = m_\beta$, получим

$$m_{S_1}^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left(\frac{S_1^2}{\sin^2\gamma} + 2S_1^2 \operatorname{ctg}^2\gamma \right) = \frac{m_\beta^2}{(\rho^2 \sin^2\gamma)(S_3^2 + 2S_1^2 \cos^2\gamma)}; \quad (18)$$

$$m_{S_2}^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left(2 \frac{S_4^2}{\sin^2\gamma'} + S_2^2 \operatorname{ctg}^2\gamma' \right) = \frac{m_\beta^2}{(\rho^2 \sin^2\gamma')(2S_4^2 + S_2^2 \cos^2\gamma')}; \quad (19)$$

Здесь $\gamma = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$; $\gamma' = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$.

Далее находят среднюю квадратическую погрешность определения координат точки P .

$$m_P = \frac{\sqrt{m_{S_1}^2 + m_{S_2}^2}}{\sin\beta_1}; \quad (20)$$

Подставляя (18) и (19) в (20), получают

$$m_P = \left(m_{\beta}^{1/(\rho \sin \beta_1)} \right) \sqrt{\frac{S_3^2 + 2S_1^2 \cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{2S_4^2 + S_2^2 \cos^2 \gamma'}{\sin^2 \gamma'}}; \quad (21)$$

Аналогичным способом находят среднюю квадратическую погрешность для сторон S_3 и S_4 .

$$m_{S_3}^2 = \left(\frac{S_1}{\sin \gamma} \right)^2 \frac{m_{\beta_1}^2}{\rho^2} + \left(\frac{S_1}{\sin \gamma} \right)^2 \frac{m_{\beta_2}^2}{\rho^2} + [(-S_3)_{ctg \gamma}]^2 \frac{m_{\beta_3}^2}{\rho^2}; \quad (22)$$

$$m_{S_4}^2 = \left(\frac{S_2}{\sin \gamma'} \right)^2 \frac{m_{\beta_2}^2}{\rho^2} + [(S_4)_{ctg \gamma'}]^2 \frac{m_{\beta_3}^2}{\rho^2} + [(-S_4)_{ctg \gamma'}]^2 \frac{m_{\beta_4}^2}{\rho^2}; \quad (23)$$

Учитывая, что $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_{\beta_3} = m_{\beta_4} = m_{\beta}$, получим:

$$m_{S_3}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \left(2 \frac{S_1^2}{\sin^2 \gamma} + S_3^2 ctg^2 \gamma \right) = \frac{m_{\beta}^2}{(\rho^2 \sin^2 \gamma)(2S_1^2 + S_3^2 \cos^2 \gamma)}; \quad (24)$$

$$m_{S_4}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \left(\frac{S_2^2}{\sin^2 \gamma'} + 2S_4^2 ctg^2 \gamma' \right) = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2 \sin^2 \gamma'} (S_2^2 + 2S_4^2 \cos^2 \gamma'); \quad (25)$$

Далее находят среднюю квадратическую погрешность определения координат точки Q .

$$m_Q = \frac{\sqrt{m_{S_3}^2 + m_{S_4}^2}}{\sin \beta_4}$$

$$m_Q = \left(m_{\beta}^{1/(\rho \sin \beta_4)} \right) \sqrt{\frac{2S_1^2 + S_3^2 \cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{S_2^2 + 2S_4^2 \cos^2 \gamma'}{\sin^2 \gamma'}}; \quad (26)$$

Как сказано выше, считается, что самой оптимальной фигурой образованной точками A, B, P, Q является четырехугольник, близкий к квадрату, при этом погрешности минимальны.

Но анализа влияния изменения длины базиса PQ и его удаленности от исходной линии AB на величину погрешностей в литературных источниках не встречается.

Нами проведен такой анализ с использованием исходных данных, полученных в графическом редакторе AutoCAD, по следующим геометрическим фигурам: квадрат, прямоугольник, трапеция, четырехугольник. Координаты точек A и B исходной линии указаны в каталоге координат в таблице 1

Длина базиса PQ равна или близка длине стороны АВ. При этом в прямоугольнике, трапеции и четырехугольнике базис PQ расположен на расстоянии близком половине исходной линии АВ. Угловые элементы для названных фигур представлены в таблицах 2,3,4,5.

Таблица 1. КАТАЛОГ КООРДИНАТ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

Названия исходных пунктов	Координаты	
	X	Y
A	12054.792	10616.619
B	12322.793	11838.002

Таблица 2. УГЛОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИГУРЫ КВАДРАТ

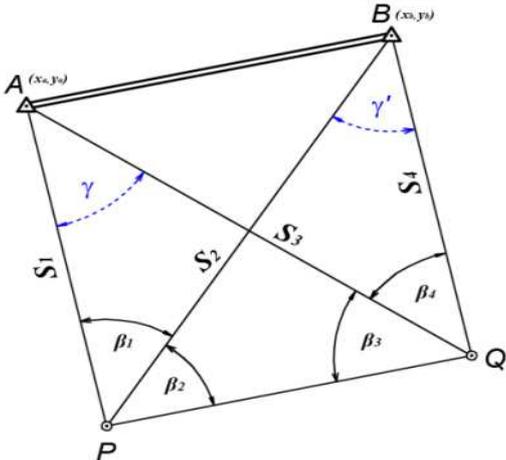
Схема	№	Град.	Мин.	Сек
	β_1	45	00	00
	β_2	45	00	00
	β_3	45	00	00
	β_4	45	00	00

Таблица 3. УГЛОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК

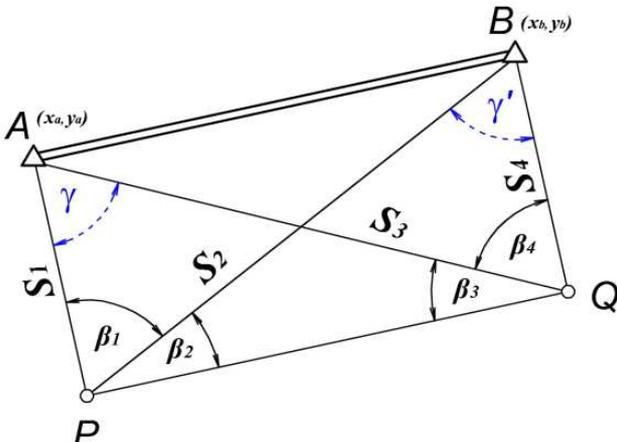
Схема	№	Град.	Мин.	Сек
	β_1	63	26	06
	β_2	26	33	54
	β_3	26	33	54
	β_4	63	26	06

Таблица 4. УГЛОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИГУРЫ ТРАПЕЦИЯ

Схема	№	Град.	Мин.	Сек
	β_1	63	26	06
	β_2	26	33	54
	β_3	33	43	57
	β_4	82	56	33

Таблица 5. УГЛОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИГУРЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Схема	№	Град.	Мин.	Сек
	β_1	74	12	42
	β_2	32	6	46
	β_3	25	58	42
	β_4	70	41	50

Для рассматриваемых фигур произведены расчеты средних квадратических погрешностей по предлагаемым формулам (21, 26) и получены следующие результаты (таблица 6).

Таблица 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПО ФИГУРАМ

Название фигуры	β_1			β_2			β_3			β_4			PQ	m_P	m_Q
	Град	Мин	Сек												
Квадрат	45	0	0	45	0	0	45	0	0	45	0	0	1250	0,15	0,14
Прямоугольник	63	26	6	26	33	54	26	33	54	63	26	6	1250	0,06	0,05
Трапеция	63	26	6	26	33	54	33	43	57	82	56	33	936	0,08	0,07
Четырехугольник	74	12	42	32	6	46	25	58	42	70	41	50	1000	0,06	0,06

Для наглядности сравним средние квадратические погрешности на диаграмме.

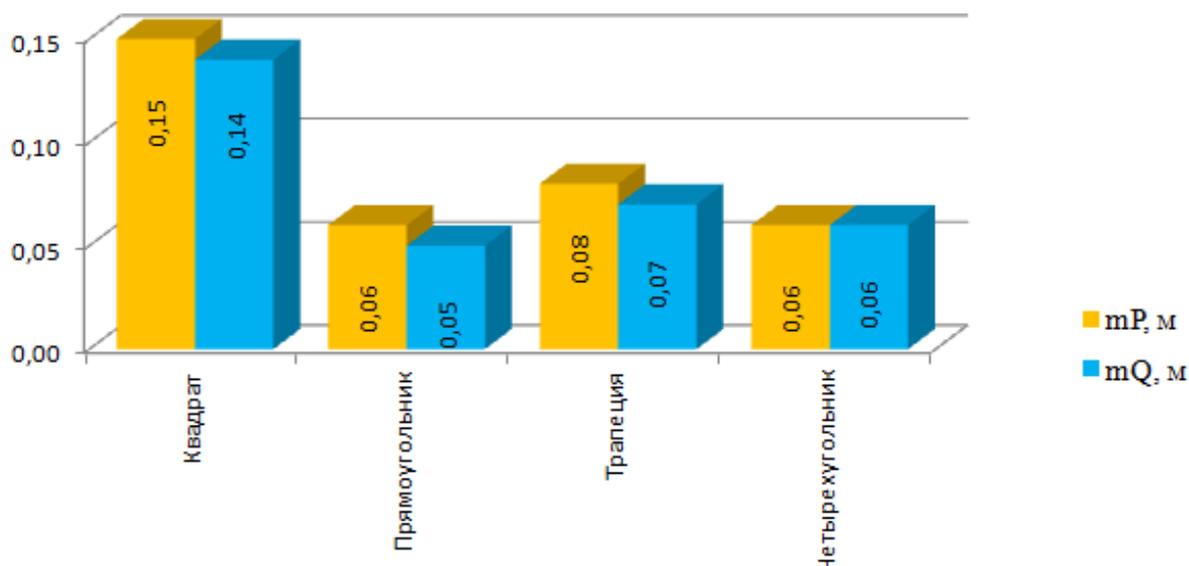


Рисунок 2. Диаграмма погрешностей точек P , Q в зависимости от фигуры построения

Анализ полученных среднеквадратических погрешностей опровергает утверждение об оптимальности квадрата в схеме построений при решении задачи Ганзена. По нашим расчетам самой точной схемой построения является фигура в виде прямоугольника, удаленного на расстоянии половины длины исходной стороны.

В свете полученных результатов нами предлагается рассмотреть изменение величины погрешностей на примере четырехугольников с различной длиной базиса PQ и разной удаленностью от исходной линии с шагом

через 0,1 длины исходной стороны. Использование фигуры четырехугольник обусловлено тем, что в полевых условиях сложно обеспечить параллельность базиса PQ и исходной линии АВ.

Ввиду того что расстояние между точками А и В равно 1250 метров, принимаем значения базисов близкие к 250, 500, 625, 750 и 1000 метров. При этом первый базис расположен на расстоянии около 250 метров, второй на расстоянии 375 метров, третий 500 метров и т.д. Общая схема построений показана на рисунке 3.

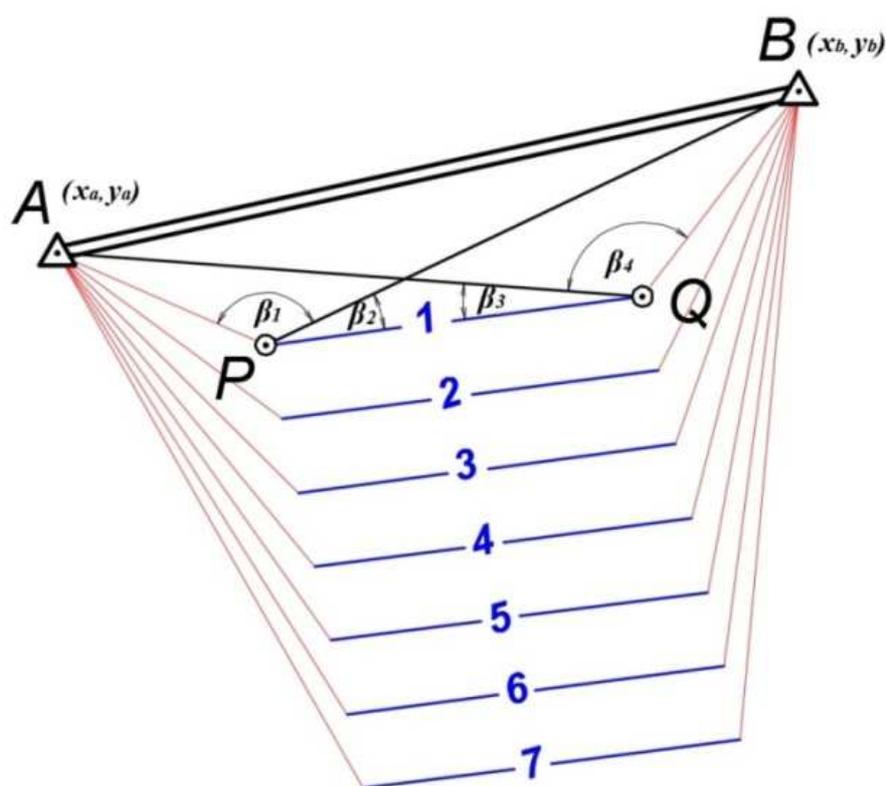


Рисунок 3. Общая схема построения четырехугольников

Значения исходных углов и полученные результаты вычисления средних квадратических погрешностей m_P и m_Q приведены в таблице 6.

По результатам проведенных расчетов погрешностей определения координат точек P и Q, построены диаграммы, ранжируемые по длине базиса и его удаленности от исходной линии.

Таблица 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПО ПЕРЕМЕННОМУ БАЗИСУ И ЕГО УДАЛЕННОСТИ

Удаленность	β_1			β_2			β_3			β_4			PQ	m _p	m _q
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"			
Базис 250															
250	136	23	50	26	48	5	12	16	24	126	51	44	250,09	0,60	0,45
375	118	4	21	35	57	50	19	24	59	109	2	20	250,09	0,35	0,29
500	102	40	49	43	39	35	25	50	11	94	56	12	250,09	0,30	0,25
625	90	0	0	50	0	0	31	30	4	83	39	59	250,09	0,30	0,26
750	79	36	40	55	11	40	36	26	41	74	31	37	250,09	0,33	0,30
875	71	4	31	59	27	44	40	44	9	67	0	31	250,09	0,39	0,35
1000	64	0	39	62	59	41	44	27	22	60	44	40	250,08	0,46	0,42
Базис 500															
250	134	5	2	19	37	18	12	16	24	126	51	44	500,77	0,18	0,15
375	114	45	37	26	59	22	19	24	59	109	2	20	500,71	0,12	0,11
500	99	28	10	33	40	2	25	50	11	94	56	12	500,70	0,11	0,11
625	87	18	23	39	35	33	31	30	4	83	39	59	500,71	0,12	0,12
750	77	29	38	44	46	50	36	26	41	74	31	37	500,70	0,15	0,14
875	69	27	40	49	17	24	40	44	9	67	0	31	500,71	0,18	0,16
1000	62	47	49	53	12	0	44	27	22	60	44	40	500,70	0,21	0,20
Базис 625															
250	130	35	1	18	10	33	11	37	11	122	56	56	625,71	0,13	0,11
375	111	0	5	25	6	18	18	26	15	105	30	15	625,71	0,09	0,08
500	96	12	8	31	28	21	24	37	14	92	1	12	625,71	0,09	0,08
625	84	40	43	37	12	28	30	7	47	81	20	24	625,71	0,10	0,09
750	75	26	32	42	18	9	34	59	2	72	41	20	625,70	0,12	0,11
875	67	52	25	46	47	25	39	14	6	65	33	15	625,71	0,14	0,13
1000	61	34	2	50	43	41	42	57	2	59	35	7	625,71	0,17	0,16
Базис 750															
250	126	53	52	17	16	49	10	48	28	115	51	44	749,95	0,10	0,08
375	106	30	9	23	41	16	17	23	2	100	26	54	749,95	0,07	0,07
500	92	29	59	29	48	6	23	17	56	87	58	14	749,94	0,07	0,07
625	81	46	53	35	22	5	28	37	25	78	9	32	749,95	0,08	0,08
750	73	12	26	40	22	2	33	21	50	70	11	38	749,95	0,10	0,09
875	66	9	1	44	48	59	37	33	23	63	35	10	749,94	0,12	0,11
1000	60	13	54	48	45	23	41	15	10	58	1	8	749,95	0,15	0,14
Базис 1000															
250	109	13	29	15	16	24	9	44	31	100	30	2	999,95	0,05	0,05
375	93	7	41	21	15	5	15	34	58	87	41	53	999,95	0,05	0,04
500	82	25	46	26	53	17	21	0	35	78	15	19	999,95	0,05	0,05
625	74	12	42	32	6	46	25	58	42	70	41	50	999,95	0,06	0,06
750	67	27	53	36	53	33	30	28	46	64	23	39	999,95	0,08	0,07
875	61	44	42	41	13	24	34	31	41	59	1	19	999,95	0,09	0,09
1000	56	48	49	45	7	24	38	9	15	54	23	0	999,95	0,12	0,11

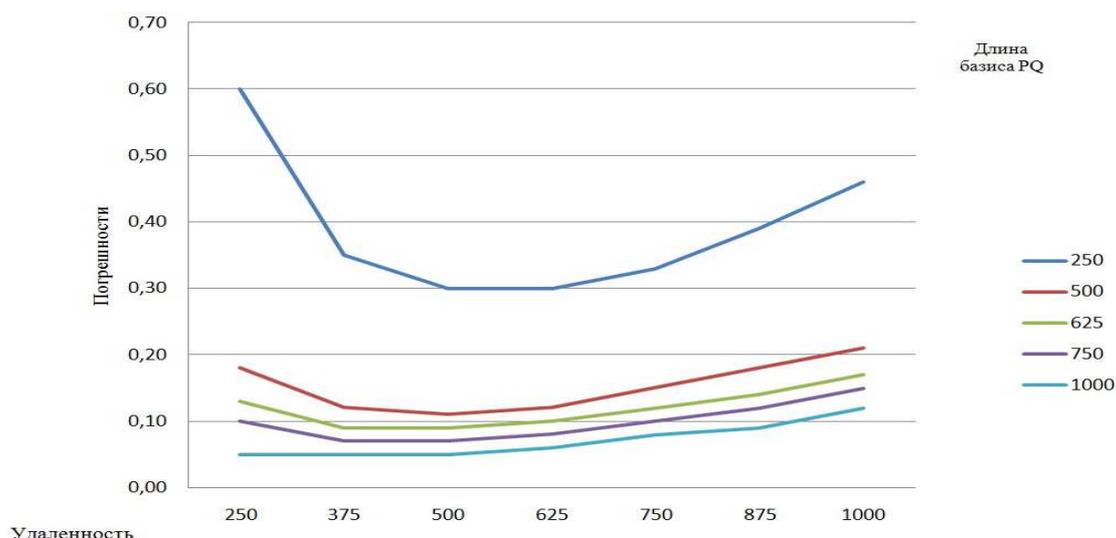


Рисунок 4. Диаграмма изменения погрешности m_P

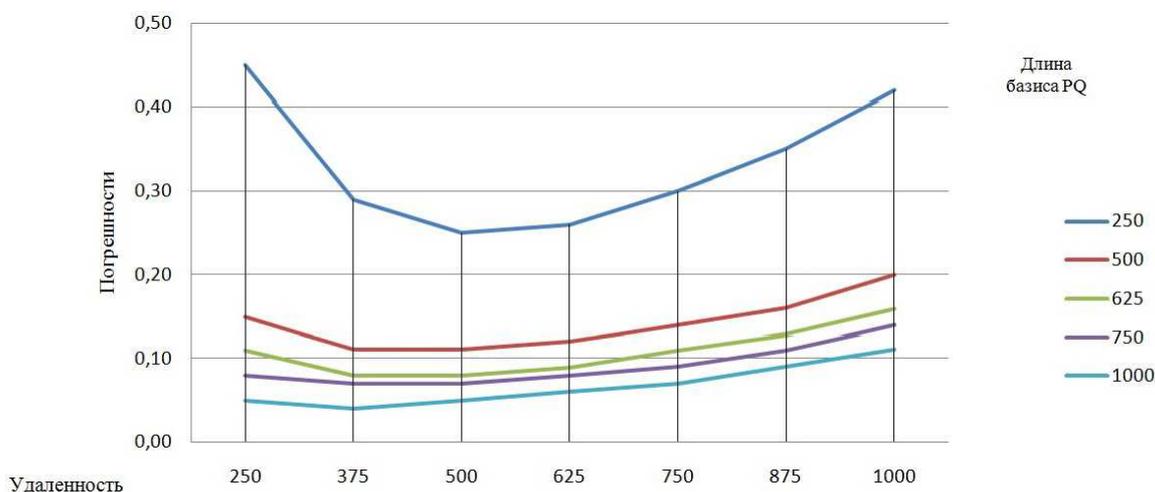


Рисунок 5. Диаграмма изменение погрешности m_Q

Как видно из расчетов и представленным диаграммам, минимальные погрешности определения координат точек P и Q получены при длине базиса PQ равной $\frac{AB}{2}$ и более. При этом оптимальной может считаться удаленность, равная 0,3 – 0,6 от длины исходной линии.

Литература

1. Справочник геодезиста. Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука, М, Недра, 1985.
2. Г. Г. Поклад, С. П. Гриднев. Геодезия: учебное пособие для вузов – М: Академический Проект, 2007.

References

1. Spravochnik geodezista. Pod red. V. D. Bol'shakova i G. P. Levchuka, M, Nedra, 1985.
2. G. G. Poklad, S. P. Gridnev. Geodezija: uchebnoe posobie dlja vuzov – M: Akademicheskij Proekt, 2007.