

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА**PHYSICAL MECHANISMS OF TURBULENT VISCOSITY AND SIMULATION OF TURBULENCE ON THE NAVIER-STOKES EQUATIONS**

Трунев Александр Петрович

к.ф.-м.н., Ph.D.

Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В работе рассматриваются решения уравнений Навье-Стокса, описывающие турбулентные течения над шероховатой поверхностью. Известно, что в природных системах существует механизм турбулентного перемешивания, ведущий к увеличению вязкости сплошной среды. В этой связи предлагаются методы регуляризации уравнений Навье-Стокса, аналогичные природным механизмам перемешивания. Показано, что в трехмерных течениях над шероховатой поверхностью турбулентная вязкость возрастает пропорционально квадрату расстояния до стенки. Сформулированы модели обтекания твердых тел с учетом свойств турбулентной среды. Предложена модификация уравнения неразрывности с учетом конечной величины пульсаций давления. Показано, что за счет пульсаций давления условие несжимаемости может нарушаться даже для течений с малыми числами Маха.

Модификация уравнения неразрывности с учетом турбулентных пульсаций приводит к системе нелинейных уравнений параболического типа. Модификация уравнения неразрывности в системе уравнений Навье-Стокса путем введения турбулентной вязкости позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами. Основным результатом, который получен при численном интегрировании модифицированной системы уравнений это устойчивость численного алгоритма при больших числах Рейнольдса, что объясняется, в первую очередь, параболическим типом системы и большой величиной турбулентной вязкости. Построена численная модель обтекания пластины при быстром изменении угла атаки. Обнаружен тип неустойчивости турбулентного пограничного слоя связанный с быстрым изменением динамических параметров. Показано, что колебания пограничного слоя приводят к генерации звука с частотой от 100 Гц до 1 кГц

Ключевые слова: УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.

The article deals with the solution of the Navier-Stokes equations describing turbulent flows over rough surfaces. It is known, that there is a mechanism of turbulent mixing in natural systems, leading to an increase in the viscosity of the continuous medium. In this regard, we suggest methods of regularization of the Navier-Stokes equations, similar to the natural mechanisms of mixing. It is shown, that in three-dimensional flows over a rough surface turbulent viscosity increases proportionally to the square of the distance from the wall. The models of the flow, taking into account the properties of the turbulent environment are considered. A modification of the continuity equation taking into account the limiting magnitude of pressure fluctuations is proposed. It is shown, that due to the pressure pulsation, the incompressibility condition may be violated even for flows with low Mach numbers. Modification of the continuity equation taking into account turbulent fluctuations leads to a system of nonlinear equations of parabolic type. Modification of continuity equation in the system of Navier-Stokes by the introduction of turbulent viscosity allows the regularization of the Navier-Stokes equations to solve the problems with rapidly changing dynamic parameters. The main result of which is obtained by numerical simulation of the modified system of equations is the stability of the numerical algorithm at a large Reynolds number, which can be explained, first, a system of parabolic type, and a large quantity of turbulent viscosity. A numerical model of flow around plates with the rapid change in angle of attack has been verified. We have discovered the type of instability of the turbulent boundary layer associated with the rapid changes in dynamic parameters. It is shown, that the fluctuations of the boundary layer to cause generation of sound at a frequency of 100 Hz to 1 kHz

Keywords: NAVIER-STOKES, TURBULENCE.

Введение

Как известно, вопрос о единственности и гладкости решений уравнений Навье-Стокса был сформулирован в виде шестой проблемы тысячелетия [1-2]. Для этой проблемы имеются, как математические доказательства существования и единственности решения задачи с периодическими граничными условиями [3-4], так и доказательства потери единственности решений при взрывной неустойчивости за конечное время [5].

Столь противоречивые результаты, с учетом того, что шестую проблему тысячелетия исследовали многие выдающиеся математики [1-2], не может не вызвать удивления. В настоящей работе дано простое объяснение двойственным результатам [3-5] в отношении поведения решений системы уравнений Навье-Стокса.

Заметим, что уравнения Навье-Стокса являются математической моделью движения вязкой несжимаемой жидкости, поэтому для приложений представляют интерес не любые решения, а только те, которые описывают реальные течения. Но в природе жидкость движется при любых условиях, независимо от свойств единственности или гладкости поля скорости. Достаточно будет указать на явления турбулентности, кавитации, дробления, обтекание инородных тел и ударные волны, В каждом случае для описания движения необходима своя модель, которая может значительно отличаться от модели Навье-Стокса [6-13].

С другой стороны, даже если поле скорости является единственным и гладким, то это еще не гарантирует, что такое движение непременно реализуется в природе. Хорошо известно, что в природе наблюдается переход к турбулентности, моделирование которой является большой математической проблемой, тесно связанной с шестой проблемой тысячелетия [1-5].

В настоящей работе мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений над шероховатой поверхностью. Основные результаты, касающиеся неизотермических потоков с учетом силы плавучести, были получены ранее в наших работах [7-12] и других. Ниже рассмотрено общее соотношение для плотности и давления в турбулентных потоках, которое позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса при числе Маха $M \rightarrow 0$, что соответствует несжимаемому течению.

Уравнения Навье-Стокса и проблема моделирования турбулентных течений над шероховатой поверхностью

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом сил плавучести и переноса инертной примеси, имеем [9-10]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: ρ - плотность воздуха; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $\text{Sc} = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g}\rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0\beta(T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$ - рис. 1.

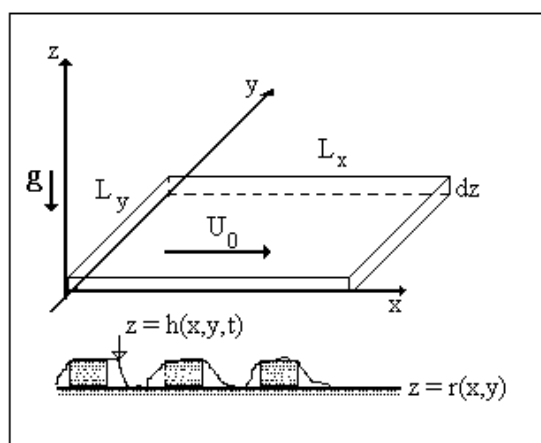


Рис.1. Геометрия течения над шероховатой поверхностью.

Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} = U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: u = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (4)$$

Приближенные решения задачи (1)-(4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [7-12] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси – рис. 2.

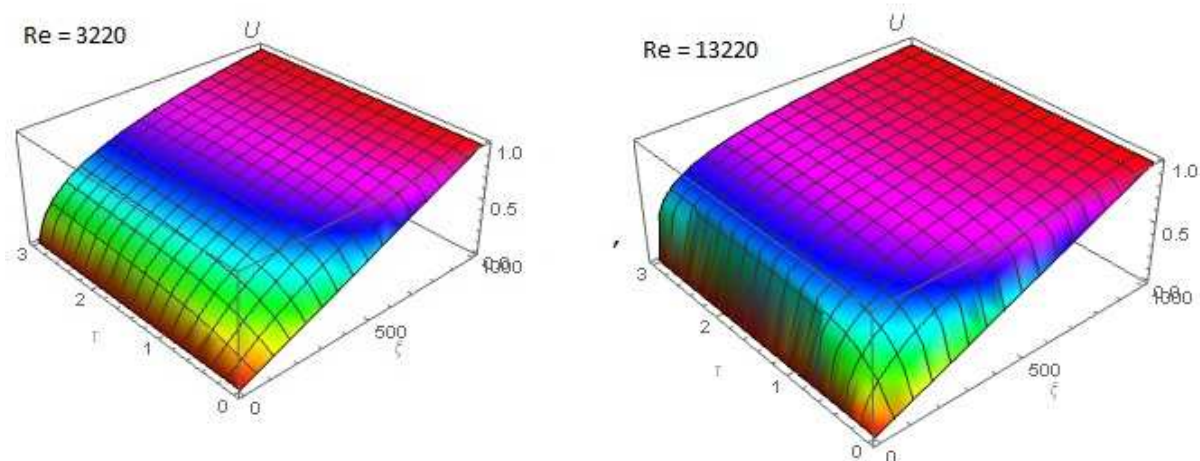


Рис. 2. Формирование логарифмического профиля скорости потока в турбулентном пограничном слое над шероховатой поверхностью: пространственно-временное распределение продольной компоненты скорости в координатах $\xi = n\eta, \tau = tu_\tau / h$ вычислено по модели (7) для двух значений числа Рейнольдса $Re = 3220; 13220$.

Отметим, что результаты, приведенные на рис. 2, получены путем численного интегрирования системы уравнений (7) с граничными условиями

(3) и начальными данными (4). Из приведенных результатов следует, что линейный профиль (4) за короткое время эволюционирует в логарифмический профиль.

Этот факт, установленный во многих исследованиях [13], показывает, что природа изобрела наиболее экономичный способ движения в форме логарифмического профиля. Однако если логарифмический профиль подставить во второе уравнение (1), то можно убедиться, что это уравнение не выполняется. Такой результат означает, что в природе существуют силы, которые поддерживают логарифмический профиль, но которые не нашли отражения в уравнениях (1). Обычно происхождение этих сил приписывают так называемым напряжениям Рейнольдса, обусловленным турбулентной вязкостью или диффузией [13-14].

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [7-12] и других. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость [9-10].

Предполагается, что такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_x, h_y, h_t , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области

течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Очевидно, что $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ является случайной функцией, поскольку зависит от случайных параметров. Уравнения, описывающие динамику $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$, следуют из уравнений (1) и (5), а их вывод дан в [9-12].

Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (23) принимает вид [9-10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{Pr h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Pr h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} = \frac{\nu}{Sch^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Sch^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta}$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_t + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости – рис. 2, так и для температуры и концентрации [7-12]. В чем же отличие исходной системы (1) и выведенной из нее системы уравнений (7)? Отличие заключается в явном учете влияния микроскопической геометрии линий тока на основное течение. Геометрический фактор оказывается весьма существенным, не смотря на его малую величину.

Так, в пограничном слое над гладкой поверхностью безразмерный параметр динамической шероховатости, определенный по динамической скорости, составляет около $\lambda^+ = hu_\tau / \nu \approx 8.71$. Для сравнения укажем, что число Рейнольдса пограничного слоя атмосферы составляет порядка $Re = HU_0 / \nu \approx 10^7 \div 10^9$.

Большая величина числа Рейнольдса и малая величина толщины вязкого подслоя вполне соизмеримы в логарифмическом масштабе, когда реализуется логарифмический профиль скорости, который выводится из уравнений (7). С другой стороны, начальные данные (4) в форме линейного профиля удовлетворяют уравнениям (1), но не удовлетворяют уравнениям (7). Отметим, что в эксперименте переход от ламинарного течения к турбулентному течению с логарифмическим профилем наблюдается на плоской пластине [13].

Модель турбулентной среды

Методы прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) опираются непосредственно на систему уравнений (1). При этом для вычисления профиля скорости часто используется приближенный метод Галеркина или метод моментов, а также метод Рунге и другие приближенные методы [1-4]. В частности, в работе [5] используется усредненная система уравнений Навье-Стокса. В этом смысле использованное нами разложение (4)-(5) можно рассматривать как один из таких приближенных методов.

Теорема существования и единственности [1-2] касается именно приближенного, а не точного решения. При этом формулировка теоремы подразумевает и описание приближенного метода решения. Например, при нахождении решения задачи (1)-(4) по методу Галеркина нельзя гарантировать существование хотя бы одного решения, а если приближенное решение существует, то нельзя гарантировать, что оно сходится к точному решению. Теоремы, сформулированные в работах [3, 4] устраняют эти недостатки приближенных методов, которые широко применяются при решении прикладных задач гидродинамики и аэродинамики.

Но даже при наличии приближенного метода решения прямое численное моделирование турбулентности не всегда приводит к желаемому результату, так как система уравнений (1), сформулированная для несжимаемых течений, содержит в себе противоречие. Действительно, при выводе этой системы уравнений предполагается, что плотность среды не меняется, а это, в свою очередь, означает малость числа Маха потока [14]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \quad (8)$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, на таких решениях, которые описаны в работе [5], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы

уравнений (1) не изменился при всех ее модификациях. Известно множество способов регуляризации системы уравнений (1), как по давлению, так и по градиенту скорости [1-5, 15].

Рассмотрим следующий подход к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (1). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок $M^2 \omega_0$, где ω_0 – характерная частота. При выполнении условия (8) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (1). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, что бы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством $M^2 \omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{1}{t} \int_0^t P dt \xrightarrow{t \rightarrow 0} P \\ \tilde{P} &= \frac{1}{t} \int_0^t P dt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим P_0 . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\omega_0(P - P_0) \quad (13)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha\omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме [1-5]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля

давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Наконец, мы можем записать систему уравнений (1) в форме системы уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Параметр турбулентной диффузии в модели (17) имеет ясный физический смысл, как и происхождение напряжений Рейнольдса. Система уравнений может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений – рис. 3-5.

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметр P_0 и параметр турбулентной вязкости μ_T следует считать заданными функциями координат и времени.

На рис. 3 представлены данные моделирования течения в пограничном слое на плоской пластине с числом Рейнольдса $Re = 2.1 \cdot 10^6$ при быстром изменении угла атаки с использованием системы уравнений (17). В верхней части рисунка показано изменение профиля продольной и нормальной к поверхности компоненты скорости с двух сторон пластины. Угол атаки

возрастает от 0 до 1° по закону $1 - e^{-2t}$. Параметр турбулентной вязкости составляет $\mu_T / \mu = 10^4$.

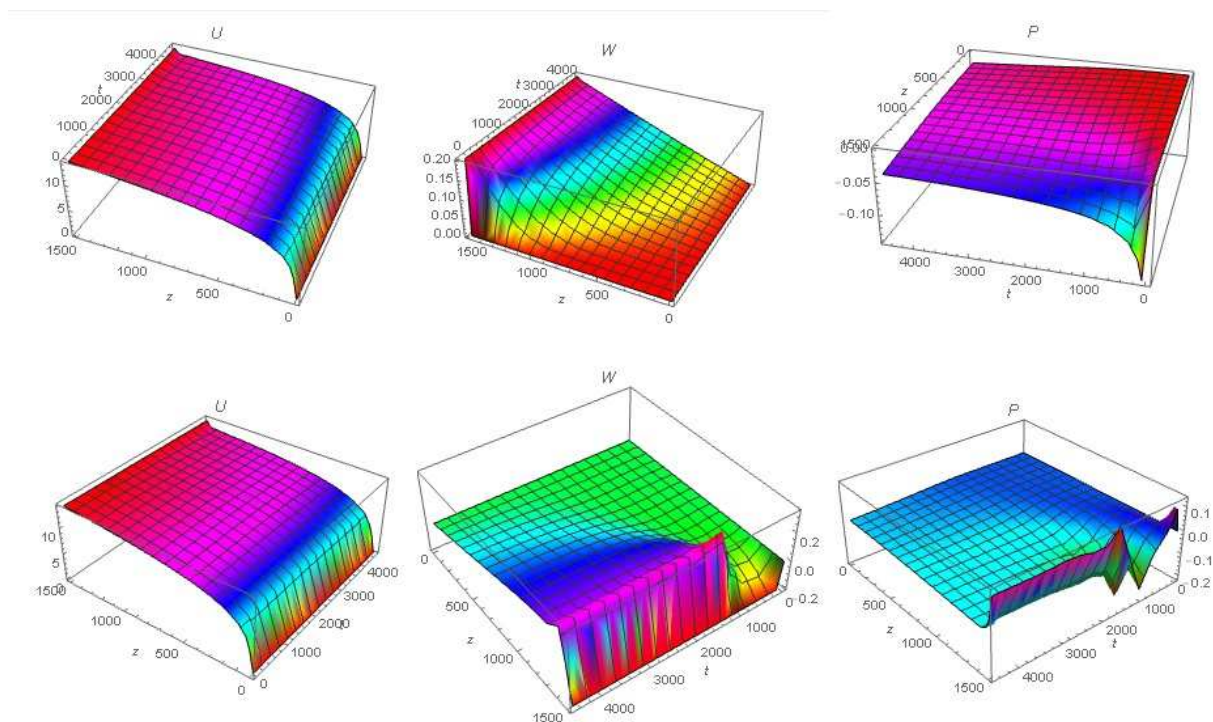


Рис. 3. Пространственно-временное распределение параметров в турбулентном пограничном слое на плоской пластине с числом Рейнольдса $Re = 2.1 \cdot 10^6$ при изменении угла атаки от 0 до 1° по закону $1 - e^{-2t}$: компоненты скорости нормированы на динамическую скорость.

Из приведенных на рис 3 данных следует, что новое состояние устанавливается в турбулентном потоке за длительное время порядка 1000, что обусловлено большой величиной турбулентной вязкости. В результате изменения параметров течения на внешней границе пограничного слоя во внутренней области формируется волна давления, которая хорошо заметна на нижней стороне пластины – рис. 3.

Однако если угол атаки возрастает от 0 до 10° по закону $1 - e^{-2t}$, то картина течения резко меняется – рис. 4-5. Соответствующее распределение скорости на границе пограничного слоя и линии тока невязкого течения приведены на рис. 5 внизу. В этом случае в турбулентном пограничном слое на нижней стороне пластины возникают незатухающие колебания давления, которые могут быть источником звуковых колебаний при движении летательных аппаратов.

Проблема генерации звука в пограничном слое и возбуждения турбулентности звуком рассматривалась многими авторами [13, 16-19]. Модель течения в пограничном слое (17), позволяет объяснить низкочастотные колебания, частота которых по порядку величины составляет $\omega \approx (10^{-4} \div 10^{-3}) u_*^2 / \nu$. Например, при дозвуковом обтекании крыла частота волн составит от 100 Гц до 1-2 кГц.

Отметим, что экспериментально было установлено, что пограничный слой на крыле теряет устойчивость при частоте внешнего источника 96 Гц [17]. С другой стороны, для турбулентных течений в 2D каналах при числах Маха $M = 0.1 \div 0.3$ были зарегистрированы резонансные моды колебаний порядка 1 кГц [19].

Считается, что основной формой колебаний в пограничном слое являются волны Толлмина-Шлихтинга [13, 16-17]. Развита в настоящей работе модель описывает волны, возникающие в турбулентном пограничном слое при внезапных динамических нагрузках, например, при быстром изменении угла атаки [20].

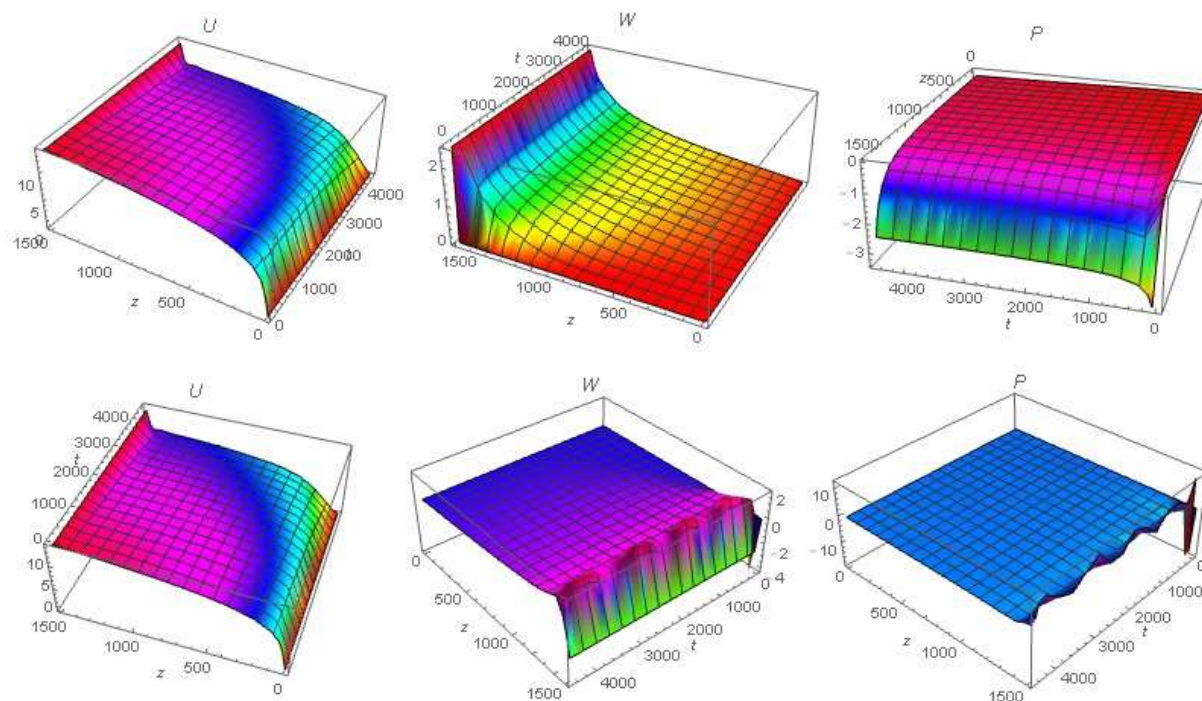


Рис. 4. Пространственно-временное распределение параметров в турбулентном пограничном слое на плоской пластине с числом Рейнольдса $Re = 2.1 \cdot 10^6$ при изменении угла атаки от 0 до 10° по закону $1 - e^{-2t}$: компоненты скорости нормированы на динамическую скорость.

На основе системы уравнений (17) можно также смоделировать отрыв турбулентного пограничного слоя при обтекании плоской пластины в результате динамического воздействия при быстром изменении угла атаки – рис. 5. В этом случае при положительном градиенте давления в пограничном слое формируется встречное течение, которое взаимодействует с основным потоком. Все параметры течения и начальные данные соответствуют данным на рис. 4, за исключение положительного градиента давления порядка $\partial P / \partial x = 0.001$ в выбранной системе единиц.

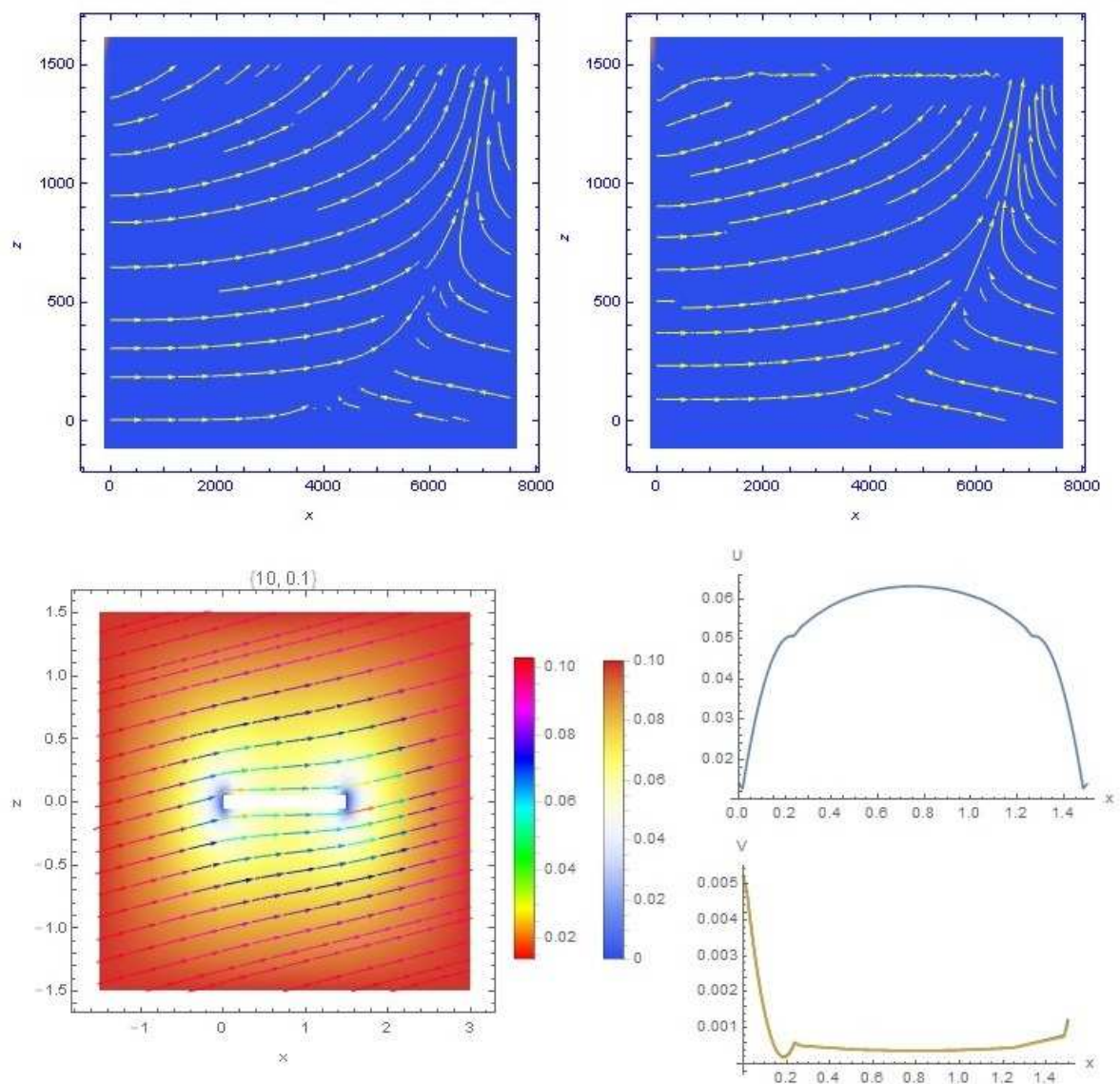


Рис. 5. Вверху – отрыв турбулентного пограничного слоя при быстром изменении угла атаки на верхней стороне пластины (слева) и на нижней стороне (справа); внизу - обтекание пластины под углом атаки 10° с числом Маха $M = 0.1$ (компоненты скорости нормированы на скорость звука).

Следует заметить, что обнаруженный в настоящей работе тип неустойчивости турбулентного пограничного слоя связан с нарушением

уравнения $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ в турбулентной среде. Показано, что за счет пульсаций давления условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ может нарушаться даже для течений с малыми числами Маха. Модификация уравнения неразрывности с учетом турбулентных пульсаций приводит к системе нелинейных уравнений параболического типа (17).

Основной результат, который получен при численном интегрировании системы уравнений (17) это устойчивость численного алгоритма при числе Рейнольдса $Re = 2.1 \cdot 10^6$, что объясняется, в первую очередь, параболическим типом системы (17) и большой величиной турбулентной вязкости. Действительно, было установлено, что при уменьшении турбулентной вязкости на порядок до величины $\mu_t / \mu = 10^3$, устойчивость расчетного алгоритма резко снижается.

Наконец, заметим, что исключение уравнения неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ из системы (1) и введение турбулентной вязкости в форме уравнения (14) позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами. Однако для обоснования уравнения (14) требуются дополнительные исследования, что выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// УМН, -2003., - Т. 58, - №2 (350), - С. 45-78.
2. Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.
3. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал, Том 13, №4 (50), 2013.
4. Давлатов Ш.О. Существование единственного гладкого решения уравнения Навье-Стокса//arXiv:1603.09665 (math.GM)
5. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.

6. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).
7. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
8. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
9. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
10. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.
11. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.
12. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.
13. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.
14. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
15. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
16. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск, Наука, 1982.
17. Довгаль А.В., Козлов В.В., Симонов О.А. Возбуждение звуком колебаний пограничного слоя на скользящем крыле// Ученый записки ЦАГИ, Т. XX, №6, 1989.
18. Brandes M., Ronneberger D. Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators// AIAA 95-126/ p. 893-901, 1995.
19. Auregan Y., Leroux M. On acoustic instability phenomena in the vicinity of a lined wall exposed to a grazing flow//arXiv:0809.3713v1, 22 Sep, 2008.
20. Висбол М. Р., Шенг Дж. С. Исследование структуры течения около профиля при быстром увеличении угла атаки// Аэрокосмическая техника, №3, 1990.

References

1. Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie i gladkost'// UMN, -2003., - Т. 58, - №2 (350), - S. 45-78.

2. C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.
3. Otelbaev M. Sushhestvovanie sil'nogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa// Matematicheskij zhurnal, Tom 13, №4 (50), 2013.
4. Davlatov Sh.O. Sushhestvovanie edinstvennogo gladkogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa//arXiv:1603.09665 (math.GM)
5. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
6. Kiselev, S.P., Ruv, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schvaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).
7. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
8. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
9. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
10. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
11. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.
12. Trunev A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.
13. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.
14. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
15. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
16. Kachanov Ju.S., Kozlov V.V., Levchenko V.Ja. Vozniknovenie turbulentnosti v pograničnom sloe. – Novosibirsk, Nauka, 1982.
17. Dovgal' A.V., Kozlov V.V., Simonov O.A. Vozbuzhdenie zvukom kolebanij pograničnogo sloja na skol'zjashhem kryle// Uchenyj zapiski CAGI, T. HH, №6, 1989.
18. Brandes M., Ronneberger D. Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators// AIAA 95-126/ p. 893-901, 1995.
19. Auregan Y., Leroux M. On acoustic instability phenomena in the vicinity of a lined wall exposed to a grazing flow//arXiv:0809.3713v1, 22 Sep, 2008.
20. Visbol M. R., Sheng Dzh. S. Issledovanie struktury techenija okolo profilja pri bystrom uvelichenii ugla ataki// Ajerokosmicheskaja tehnika, №3, 1990.