

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО
ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В СЕВЕРНОЙ
ПОЛЯРНОЙ ОБЛАСТИ САТУРНА****SIMULATION OF HEXAGONAL TURBULENT
FLOW IN THE NORTH POLAR REGION OF
SATURN**

Трунев Александр Петрович

Alexander Trunev

к.ф.-м.н., Ph.D.

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

Как известно, в настоящее время вокруг северного полюса Сатурна существует крупномасштабное гексагональное течение, с характерными масштабами скорости и длины - 120 м/с и 14500 км соответственно. Это течение, наблюдаемое уже более 35 лет, является предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований. В настоящей работе предложена модель и рассматриваются численные решения уравнений, описывающих турбулентное течение в планетарном пограничном слое вокруг северного полюса Сатурна. Показано, что малое нарушение осевой симметрии в сдвиговом геострофическом течении приводит к развитию гексагональных паттернов в турбулентном пограничном слое. Кроме того, под влиянием силы Кориолиса и градиента турбулентной вязкости в турбулентном пограничном слое образуется струя, прижатая к нижней границе слоя. Эти результаты использованы для моделирования наблюдаемого гексагонального течения вокруг северного полюса Сатурна. Предполагается, что малое по амплитуде геострофическое течение описывается суммой нулевой и шестой гармоник функции тока, что приводит к возбуждению течения на верхней границе планетарного пограничного слоя. Установлено, что такого рода возбуждение усиливается в пограничном слое и достигает максимума в струе, прижатой к нижней границе. Эта струя, циркулирующая по шестиугольнику, совпадает с областью возникновения облачного покрова, который регистрируется в экспериментах. Указанный механизм возбуждения гексагонального течения вокруг северного полюса Сатурна подтвержден численными расчетами трехмерного нестационарного планетарного пограничного слоя.

As is known, currently around the north pole of Saturn there is a large-scale hexagonal flow, with characteristic scales of length and speed - 120 m / s and 14,500 km respectively. This trend observed for more than 35 years, is the subject of many experimental and theoretical studies. In this paper, we propose a model and discuss the numerical solutions of the equations describing turbulent flow in the planetary boundary layer around the north pole of Saturn. It has been shown that a small violation of the axial symmetry in geostrophic shear leads to the development of hexagonal patterns in a turbulent boundary layer. In addition, under the influence of Coriolis forces and turbulent eddy viscosity gradient in a turbulent boundary layer formed jet pressed to the bottom edge of the layer. These results are used to simulate the observed hexagonal flow around the north pole of Saturn. It is assumed that the small amplitude geostrophic flow is described by a sum of zero and the sixth current harmonic functions, which leads to the excitation current at the upper boundary of the planetary boundary layer. It is found that such excitation enhanced in the boundary layer and reaches a maximum in the jet pressed to the bottom border. This jet, circulating on the hexagon coincides with the region of origin of the cloud cover, which is registered in the experiments. This excitation mechanism hexagonal flow around the north pole of Saturn is confirmed by numerical calculations of three-dimensional non-stationary planetary boundary layer.

Ключевые слова: ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ,
ПЛАНЕТАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ, САТУРН,
АТМОСФЕРА САТУРНА, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.

Keywords: DYNAMICS OF ATMOSPHERE,
PLANETARY BOUNDARY LAYER, SATURN,
SATURN'S ATMOSPHERE, TURBULENCE.

Doi: 10.21515/1990-4665-125-050

Введение

В настоящее время на северном полюсе Сатурна в районе 75°N (PC) широты (78°N PG), наблюдается крупномасштабное гексагональное течение, с характерными масштабами скорости и длины - 120 м/с и 14500 км соответственно. Это течение, наблюдаемое уже более 35 лет, является предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований [1-5].

Существует несколько объяснений структуры течения на северном полюсе Сатурна – возможная связь явления с магнитным полем [1], волновая теория [2], гипотеза нелинейного равновесия неустойчивой баротропной струи, подтвержденная лабораторными экспериментами [3], численная модель эволюции гауссовой струи в стратифицированной атмосфере [4]. В теории [2] предполагается, что существует дифференциальное вращение, обусловленное наличием антициклона во внешней области гексагонального течения, которое, таким образом, представляет собой стационарные волны Россби. Основным недостатком модели [3] является ее верификация в узкой области параметров, далеких от наблюдаемых величин. В модели [4] используется гипотеза о динамическом равновесии при заданной начальной скорости струи, практически совпадающей с наблюдаемой скоростью 100-120 км/с [4-5]. Кроме того, не учитывается турбулентность течения, которая может значительно повлиять на динамику струи.

В работах [6-11] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений. Основные результаты, касающиеся неизотермических потоков в планетарном пограничном слое с учетом градиента давления, ускорения потока, силы плавучести и силы Кориолиса, были получены в наших работах [6-8] и других.

В настоящей работе предложена модель и рассматриваются численные решения уравнений, описывающих турбулентное течение в планетарном пограничном слое вокруг северного полюса Сатурна. Показано, что малое нарушение осевой симметрии в сдвиговом геострофическом течении приводит к развитию гексагональных паттернов в турбулентном пограничном слое. Кроме того, под влиянием градиента турбулентной вязкости и силы Кориолиса в пограничном слое образуется струя, прижатая к нижней границе слоя.

Эти результаты использованы для моделирования наблюдаемого гексагонального течения на северном полюсе Сатурна. Предполагается, что геострофическое течение с амплитудой скорости порядка 10 м/с, описывается функции тока в виде суммы нулевой и шестой гармоник. Это приводит к возбуждению течения на верхней границе планетарного пограничного слоя. Установлено, что такого рода возбуждение усиливается в пограничном слое и достигает максимума порядка 180 м/с в струе, прижатой к нижней границе. Эта струя, циркулирующая по шестиугольнику, совпадает с областью возникновения облачного покрова, который регистрируется в экспериментах. Указанный механизм возбуждения гексагонального течения на северном полюсе Сатурна подтвержден численными расчетами трехмерного нестационарного планетарного пограничного слоя.

Уравнения Навье-Стокса и проблема моделирования турбулентных течений в планетарном пограничном слое

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом силы плавучести и силы Кориолиса, имеем [7-10]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}] + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения планеты; ρ - плотность; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $Sc = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g} \rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$ - рис. 1. Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} &= 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} &= U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

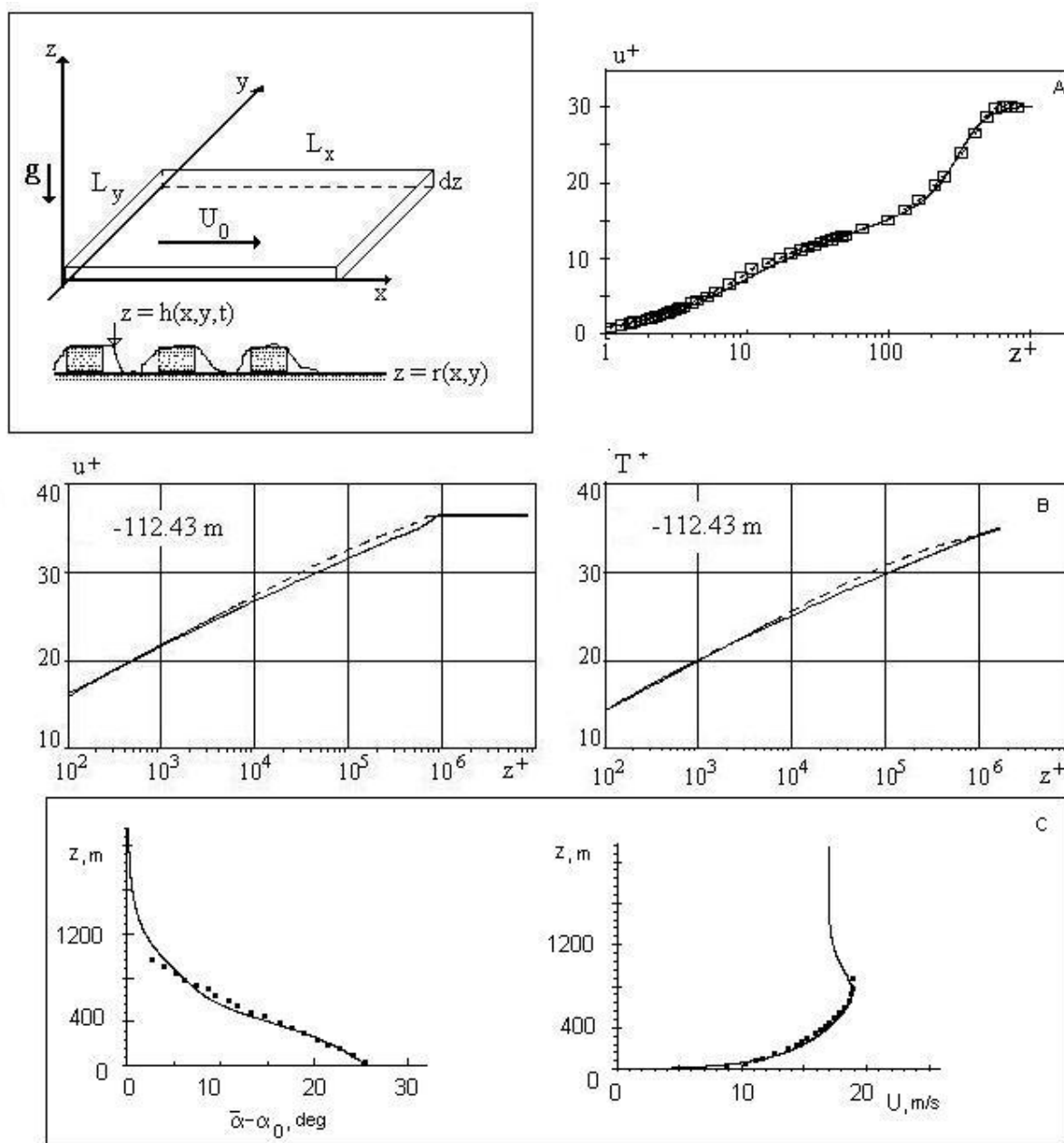


Рис.1. Геометрия течения над шероховатой поверхностью и результаты тестирования модели планетарного пограничного слоя [6-9]: А - профиль скорости в турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления [12]; В - профили скорости и температуры при неустойчивой стратификации [13-14]; С – угол разворота потока и скорость в нейтрально стратифицированном планетарном пограничном слое [15].

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: u = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (4)$$

Решения задачи (1)-(4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [6-9] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [6-11]. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость.

Такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_x, h_y, h_t , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим

подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (1) принимает вид [7-9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Sch}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Sch}^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta\Phi$, $\Phi = h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [8-9].

Модель (7) тестировалась в случае неизотермических течений над шероховатой поверхностью в градиентах давления и с учетом сил плавучести и силы Кориолиса. Некоторые результаты приведены на рис. 1, А, В, С – сплошные линии вместе с данными экспериментов [12-15].

Модель турбулентной среды

Анализ системы уравнений (7) показывает, что уравнение неразрывности в турбулентном потоке принимает вид как для сжимаемой среды, хотя в исходной системе уравнений Навье-Стокса (1) предполагается течение несжимаемого газа. Условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ означает, что существует ограничение на число Маха потока [16]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \quad (8)$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, на таких решениях, которые описаны в работах [10-11, 17], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы уравнений (1) не изменился при всех ее модификациях. Известно множество способов регуляризации системы уравнений (1), как по давлению, так и по градиенту скорости [17-20].

Рассмотрим подход [10-11] к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (1). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок $M^2 \omega_0$, где ω_0 – характерная частота пульсаций давления. При выполнении условия (8) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (1). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, что бы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством $M^2 \omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = P \\ \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим P_0 . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\omega_0(P - P_0) \quad (13)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha\omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x_i)$ – вектор объемных сил. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Таким образом, мы можем записать уравнения Навье-Стокса (1) в виде системы уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [10-11].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая модель [6-8].

В случае атмосферных течений можно объединить модели (7) и (17) в одну модель, имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}P) = \rho \nabla (\nu_T \nabla \frac{P}{\rho}) \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2 \varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l = \nabla [\nu(P_0, T_0) (1 + k_r^2 z^2) \nabla u_i]$$

Здесь $i = 1, 2, 3$; ε_{ikl} - тензор Леви-Чивита, k_r - параметр шероховатости подстилающей поверхности, $P_0 = P_0(z), T_0 = T_0(z)$ - статическое распределение давления по высоте атмосферы. Таким образом, используя модели турбулентности (7) и (17), мы исключили уравнение неразрывности. В случае несжимаемого течения плотность выпадает из первого уравнения (19). Тем

самым достигается регуляризация системы уравнений Навье-Стокса в случае турбулентных течений в планетарном пограничном слое.

Численная модель планетарного пограничного слоя

Система уравнений (19-20) решалась численно методом установления в прямоугольной области $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L$. Результаты расчетов приведены на рис 2-7. Все величины в уравнениях (19) приводились к безразмерному виду. В качестве масштаба скорости используется произведение $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$, где $L_0 \approx 36250 \text{ km}$ – выбранный нами масштаб моделирования, который охватывает струю гексагонального течения и некоторую часть внешнего течения, $\omega = 1.63785 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ – угловая скорость вращения Сатурна в северных широтах [5].

Для обеспечения необходимых свойств формирования гексагональной струи, система уравнений (19) замещалась системой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}P) &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla(v_T \nabla P), v_T = a \frac{(1 + k_a^2 z^2)}{(1 - k_a^2 z^2)} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l &= \nabla(v_T \nabla u_i) \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $i = 1, 2, 3$; a, k_a – параметры. В качестве начальных данных использовались нулевые данные:

$$t = 0 : P = 0, \mathbf{v} = 0 \quad (21)$$

В качестве граничных условий на нижней границе использовались нулевые граничные условия (21), а на верхней границе и на боковых стенках использовалось точное решение для плоского геострофического течения

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \nabla^2 \psi = 0 \\ \psi &= \{A_0 J_0(k_0 r) \exp[-k_0(L-z)] + A_6 J_6(k_6 r) \sin(6\phi) \exp[-k_6(L-z)]\} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$, параметры модели A_i, k_i подбираются из условия согласования с экспериментальными данными, τ - время установления, которое везде ниже принято за единицу, $\tau = 1$.

В области взаимодействия геострофического течения с турбулентным пограничным слоем в качестве граничных условий на верхней границе и на боковых стенках использовался модельный профиль, описывающий сдвиговое течение:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\psi = -[\omega - 0.5(\omega_1 + \omega_2) + 0.5(\omega_1 - \omega_2) \tanh(kr - R - b|x|)](1 - e^{-\tau})/\omega$$

Параметры завихренности и угловая скорость вращения Сатурна составляют по данным [5]

$$\omega_1 = 1.63782 \cdot 10^{-4}, \omega_2 = 1.63792 \cdot 10^{-4}, \omega = 1.63785 \cdot 10^{-4} \quad (24)$$

Задавая параметры модели и профиля (24) можно получить гексагональные паттерны в турбулентном пограничном слое – рис. 2. Это пример интересен тем, что гексагональное течение развивается из слабodeформированного течения с осевой симметрией, как предполагается в модели [2]. Отметим, что данные на рис. 2 получены при следующих значениях параметров

$$L_x = L_y = 0.5, L = 0.033, R = 0.267, b = 0.1, k_a = 0.978/L, Pr = 0.72, a = 10^{-3}. \quad (25)$$

Анализируя полученные результаты – рис.2, можно предположить, что гексагональные паттерны развиваются при взаимодействии геострофического течения с планетарным пограничным слоем. Далее будем моделировать геострофическое течение согласно (22), как комбинацию нулевой и шестой гармоник с параметрами

$$k_0 = 26.440162, k_6 = 24.263135, A_0 = 0.007/k_0, A_6 = 0.007/k_6$$

$$L_x = L_y = 0.5, L = 0.006, k_a = 0.975/L, Pr = 0.72, a = 10^{-3}. \quad (26)$$

Отметим, что параметры (26) оптимизированы с существующим в северных широтах Сатурна профилем течения [5]. Для оптимизации профиля вместо функции Бесселя $J_0(k_0 r)$ в выражении (22) использовалась функция $J_0(k_0 r) + 0.3k_0 r$. Для дальнейшей же оптимизации требуется добавление гармоник с другими волновыми числами. Полученные ниже результаты носят качественный характер, хотя вычисленные значения скорости в струе согласуются с экспериментальными данными [4-5].

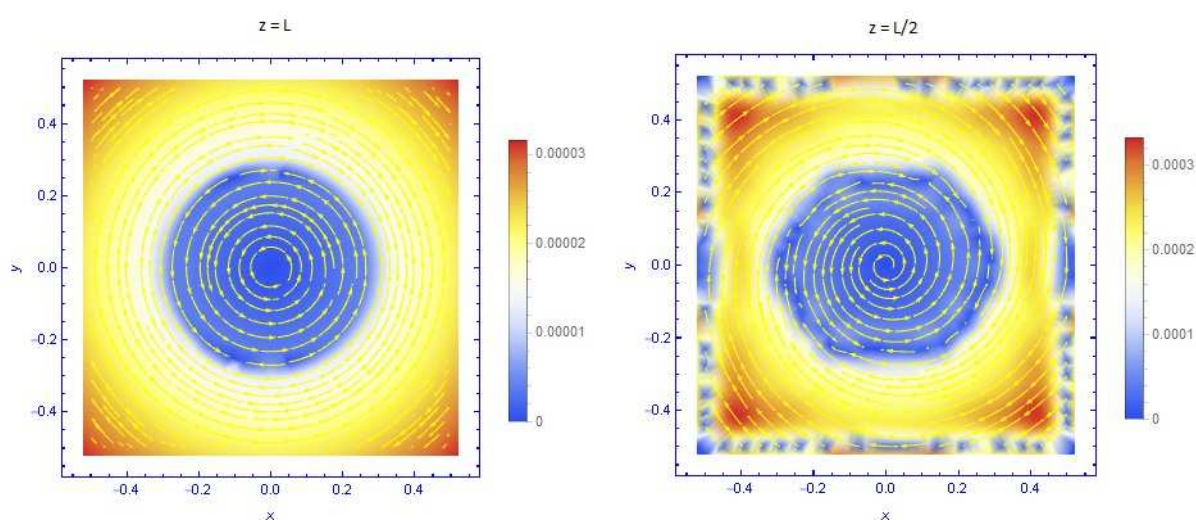


Рис. 2. Развитие гексагонального течения в модели турбулентного пограничного слоя (20)-(21), (23) с параметрами (24)-(25) в сечениях $z = L; L/2$ - левый и правый рисунки соответственно.

На рис. 3-7. приведены данные моделирования гексагонального течения в планетарном пограничном слое по модели (20)-(22) с данными (26). На рис. 3 представлены изолинии азимутальной компоненты скорости и линии тока гексагонального течения на верхней границе пограничного слоя. Максимальная скорость в этой области течения 18 м/сек. Отметим, что толщина слоя, в котором развивается струя, значительно меньше, чем толщина всего пограничного слоя – 0.006 и 0.033 соответственно.

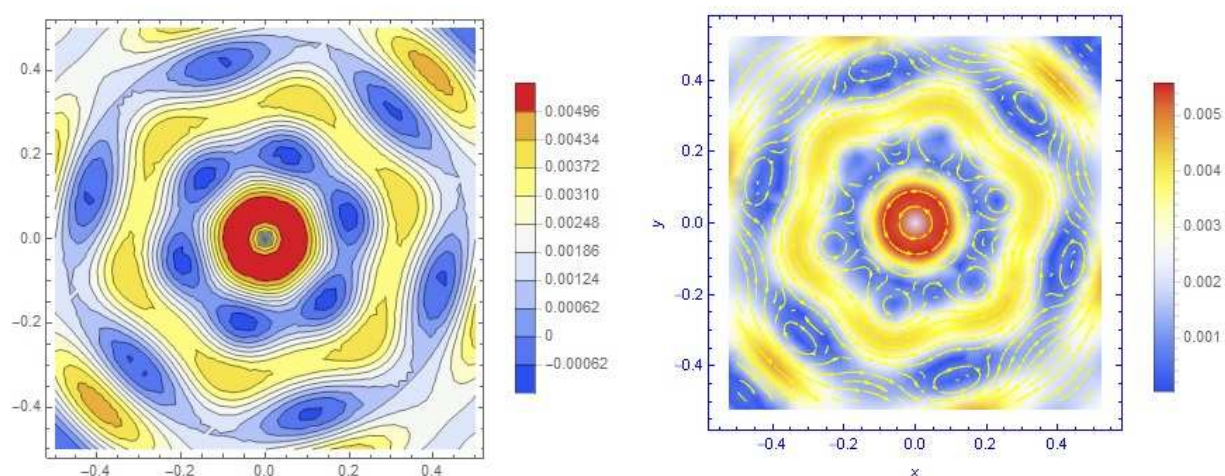


Рис 3. Изолинии безразмерной азимутальной скорости (слева) и линии тока (справа) гексагонального течения на верхней границе пограничного слоя в сечении $z = L$. Для получения размерных величин данные следует умножить на выбранный масштаб скорости $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$.

При распространении вглубь пограничного слоя скорость течения возрастает и достигает максимального значения около 180 м/с – рис. 4-5. Этот эффект не является неожиданным, так как он наблюдается и в земной атмосфере – рис. 1,С. Однако в атмосфере Сатурна, которая простирается на значительно большую глубину, это эффект является более заметным. Так, для параметров (25)-(26) скорость течения возрастает на порядок, что объясняется значительным изменением параметров турбулентного переноса по высоте слоя.

На рис. 5 представлены профили компонентов горизонтальной скорости $u = u_x, v = u_y$ по высоте пограничного слоя. Из этих данных следует, что максимум скорости в струе достигается при $z = L/2$.

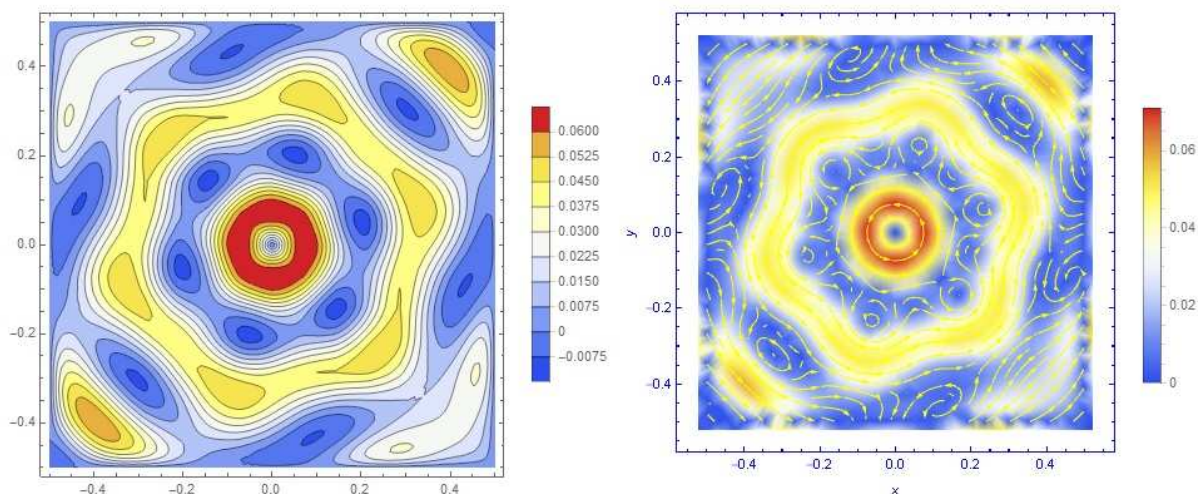


Рис. 4. Изолинии безразмерной азимутальной скорости (слева) и линии тока (справа) гексагонального течения в сечении $z = L/2$, где достигается максимальная скорость струи. Для получения размерных величин данные безразмерной скорости следует умножить на выбранный масштаб $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$.

Из приведенных на рис. 5 данных следует, что струя формируется между верхней и нижней границей, на которой скорость течения во вращающейся системе координат обращается в ноль. На рис. 6 представлены данные по распределению модуля скорости течения в пограничном слое. Мы предполагаем, что наблюдаемое гексагональное течение визуально фиксируется по границе облачного покрова, которая соответствует резкому изменению скорости. В таком случае данные на рис. 6 соответствуют наблюдаемой картине облачного покрова, по изменению которого определяются параметры гексагонального течения [1, 4-5, 21-26].

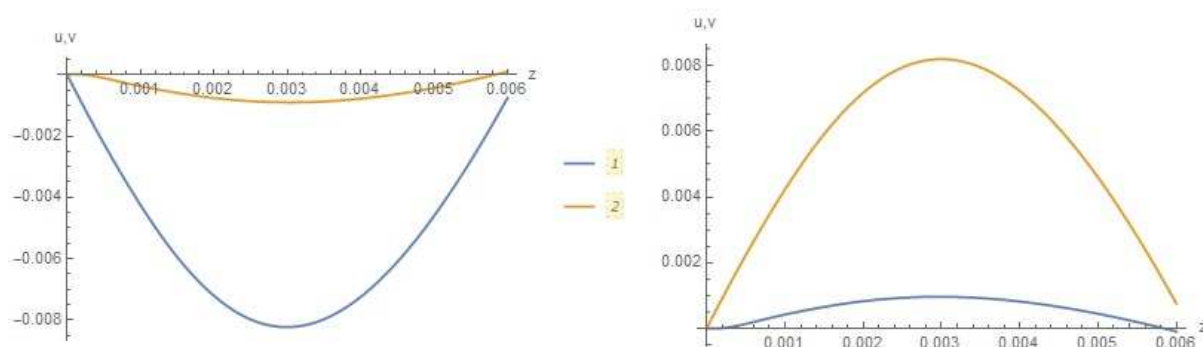


Рис. 5. Профили составляющих безразмерной горизонтальной скорости по высоте пограничного слоя в точках $x = 0.45, y = 0$ (слева) и $x = 0., y = 0.45$ (справа): 1 – u , 2 – v .

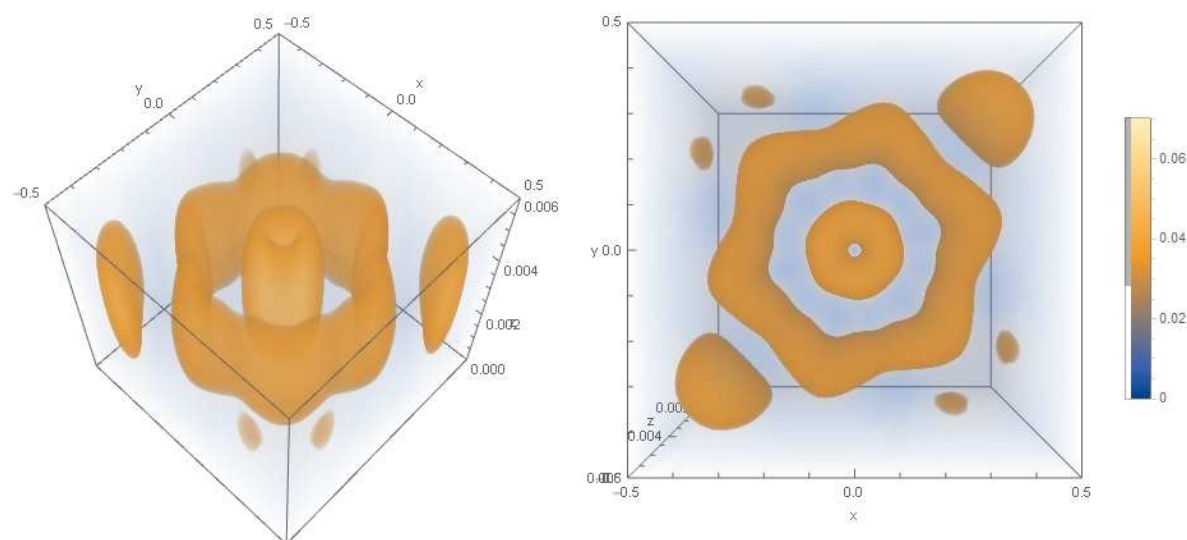


Рис. 6. Распределение безразмерного модуля скорости в пограничном слое, содержащем гексагональное течение. Для получения размерных величин все данные следует умножить на выбранный масштаб скорости $\omega L_0 / 2 \approx 2973 m/s$.

Отметим, что гексагональное течение при визуализации по модулю скорости выглядит как отвесная стена, высотой около 100 км – рис.6. Было

установлено [5], что вокруг северного полюса существует циклоническое течение, скорость которого превосходит скорость в гексагональной струе. Действительно, данные на рис. 4 показывают, что азимутальная скорость достигает максимального значения в области $r \approx 0.1$ и спадает на периферии.

Отметим, что линии тока на рис. 4 указывают на наличие вихрей, распределенных по сторонам шестиугольника, что качественно согласуется с лабораторной моделью гексагонального течения [3]. С другой стороны, картина распределения модуля скорости, представленная на рис. 6, качественно соответствует аналогичному распределению, полученному в модели [4].

Таким образом, мы установили механизм образования гексагонального течения на северном полюсе Сатурна, который заключается в усилении слабого геострофического течения в турбулентном планетарном пограничном слое. Возбуждение шестой гармоники является естественным откликом при деформации симметричного сдвигового геострофического течения, взаимодействующего с планетарным пограничным слоем – рис. 2. Дальнейшее развитие течения ведет к образованию гексагональной струи с высокой скоростью в пограничном слое – рис. 4-6.

Отдельного внимания заслуживает вопрос об источнике энергии струи, которая, очевидно, заимствуется из среднего движения атмосферы. Отметим, что выбранный масштаб скорости $\omega L_0/2 \approx 2973 \text{ m/s}$ связан с вращением планеты и атмосферы как целое. Масштаб относительной скорости в гексагональной струе при этом является малой величиной порядка 0.05 – рис. 4-6, а энергия потока и возмущение давления еще меньшей величиной порядка 0.001.

Исследование показывает, что при тех параметрах задачи, которые использованы для получения данных на рис. 2-6, можно пренебречь влиянием

давления на скорость течения, что объясняется малой величиной относительной скорости и, соответственно, малой величиной возмущений статического давления. Тем самым снимается вопрос о граничных условиях для давления.

Следовательно, наблюдаемое течение в гексагональной струе можно рассматривать как малое возмущение основного течения [2]. Отсюда следует, что волновые числа, фигурирующие в выражении функции тока (22) должны соответствовать стоячим волнам, что использовано для нахождения этих параметров при формировании данных (26).

Выбранный масштаб моделирования толщины планетарного пограничного слоя в безразмерных единицах составляет 0.006, что соответствует 217.5 км, а максимум скорости струи приходится на высоту 0.003, что соответствует 108.75 км.

Наконец, заметим, что основной эффект турбулентного течения в модели (20)-(22) заключается в формировании струи вблизи поверхности, на которой скорость течения обращается в ноль во вращающейся системе координат. Для этого слагаемое в правой части второго уравнения (20), описывающее турбулентный перенос, приведено к такому виду, что струя формируется при любых начальных данных вида (22) на верхней границе слоя.

Однако модель турбулентной струи может быть использована и в своем исходном виде (19) при соответствующем выборе параметров турбулентного переноса и граничных условий. При этом следует учесть, что в атмосфере Сатурна гексагональное течение может развиваться также из возмущений на нижней границе планетарного пограничного слоя. Этот сценарий формирования турбулентной струи является предметом наших дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole. *Icarus*, 76(Nov.), 335-356, 1988.
2. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. *Science* 247, 1061–1063, 1990.
3. Barbosa Aguiar, A. C., Read, P. L., Wordsworth, R. D., et al. A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon//*Icarus*, 206, 755-763, 2010.
4. Morales-Juberias, R., Sayanagi, K. M., Simon, A. A., et al. Meandering Shallow Atmospheric Jet as a Model of Saturn's North-polar Hexagon. *Astrophysical Journal Letters*, 806, L18, 2015.
5. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.
6. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
7. Trunev A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ *Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management*, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
8. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. – Сочинский научно-исследовательский центр РАН, Сочи, 160 с., 1999.
9. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.
10. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>
11. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>
12. Nagano Y., Kasagi N., Ota T., Fujita H., Yoshida H. & Kumada M. Data-Base on Turbulent Heat Transfer/ Department of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, DATA No FW BL004, 1992.
13. Van Ulden A. & Holtslag A. A. M. Estimation of Atmospheric Boundary Layer Parameters for Diffusion Applications// *J. Clim. Appl. Meteorol.*, 24, pp. 1196–1207, 1985.
14. Pugliese S., Jaeger M. & Occelli R. Finite element modelling of plume dispersion in the lower part of the atmosphere/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub. Southampton-Boston, 99-108. 1996
15. Detering H. W. & Etling D. Application of the E- ϵ Turbulence Model to the Atmospheric Boundary Layer// *Boundary-Layer Meteorol*, 33, pp. 113–133, 1985.

16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
17. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
18. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал, Том 13, №4 (50), 2013.
19. Давлатов Ш.О. Существование единственного гладкого решения уравнения Навье-Стокса//arXiv:1603.09665v2 (math.GM), 30 Dec 2016.
20. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
21. Karkoschka, E., and Tomasko, M. G. Saturn's upper atmospheric hazes observed by the Hubble Space Telescope//Icarus, 106, 428-441, 1993.
22. Sanchez-Lavega, A., Rojas, J. F., and Sada, P. V. Saturn's Zonal Winds at Cloud Level. Icarus, 147, 405-420, 2000.
23. Fletcher, L. N., Irwin, P. G. J., Orton, G. S., et al. Temperature and Composition of Saturn's Polar Hot Spots and Hexagon// Science, 319, 79-81, 2008.
24. Choi D. S., Showman A. P., and Brown R. H. Cloud features and zonal wind measurements of Saturn's atmosphere as observed by Cassini//VIMS. J. Geophy. Res., 114, E4007, 2009.
25. Friedson, A. J., and Moses, J. I. General circulation and transport in Saturn's upper troposphere and stratosphere//Icarus, 218, 861-875, 2012.
26. Liu, J., Schneider, T., and Fletcher, L. N. Constraining the depth of Saturn's zonal winds by measuring thermal and gravitational signals// Icarus, 239, 260-272, 2014.

Библиографический список

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole. Icarus, 76(Nov.), 335-356, 1988.
2. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. Science 247, 1061–1063, 1990.
3. Barbosa Aguiar, A. C., Read, P. L., Wordsworth, R. D., et al. A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon//Icarus, 206, 755-763, 2010.
4. Morales-Juberias, R., Sayanagi, K. M., Simon, A. A., et al. Meandering Shallow Atmospheric Jet as a Model of Saturn's North-polar Hexagon. Astrophysical Journal Letters, 806, L18, 2015.
5. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.
6. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
7. Trunev A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
8. Trunev A.P. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. – Сочинский научно-исследовательский центр РАН, Сочи, 160 с., 1999.
9. Trunev A.P. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского

gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.

10. Trunев A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjazkosti i modelirovanie turbulentnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

11. Trunев A.P. Modelirovanie turbulentnogo techenija v polosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

12. Nagano Y., Kasagi N., Ota T., Fujita H., Yoshida H. & Kumada M. Data-Base on Turbulent Heat Transfer/ Department of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, DATA No FW BL004, 1992.

13. Van Ulden A. & Holtslag A. A. M. Estimation of Atmospheric Boundary Layer Parameters for Diffusion Applications// J. Clim. Appl. Meteorol., 24, pp. 1196–1207, 1985.

14. Pugliese S., Jaeger M. & Occelli R. Finite element modelling of plume dispersion in the lower part of the atmosphere/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub. Southampton-Boston, 99-108. 1996

15. Detering H. W. & Etling D. Application of the E- Turbulence Model to the Atmospheric Boundary Layer// Boundary-Layer Meteorol, 33, pp. 113–133, 1985.

16. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

17. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.

18. Otelbaev M. Sushhestvovanie sil'nogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa// Matematicheskij zhurnal, Tom 13, №4 (50), 2013.

19. Davlatov Sh.O. Sushhestvovanie edinstvennogo gladkogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa//arXiv:1603.09665v2 (math.GM), 30 Dec 2016.

20. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.

21. Karkoschka, E., and Tomasko, M. G. Saturn's upper atmospheric hazes observed by the Hubble Space Telescope//Icarus, 106, 428-441, 1993.

22. Sanchez-Lavega, A., Rojas, J. F., and Sada, P. V. Saturn's Zonal Winds at Cloud Level. Icarus, 147, 405-420, 2000.

23. Fletcher, L. N., Irwin, P. G. J., Orton, G. S., et al. Temperature and Composition of Saturn's Polar Hot Spots and Hexagon// Science, 319, 79-81, 2008.

24. Choi D. S., Showman A. P., and Brown R. H. Cloud features and zonal wind measurements of Saturn's atmosphere as observed by Cassini//VIMS. J. Geophy. Res., 114, E4007, 2009.

25. Friedson, A. J., and Moses, J. I. General circulation and transport in Saturn's upper troposphere and stratosphere//Icarus, 218, 861-875, 2012.

26. Liu, J., Schneider, T., and Fletcher, L. N. Constraining the depth of Saturn's zonal winds by measuring thermal and gravitational signals// Icarus, 239, 260-272, 2014.