

УДК 517.947

UDC 517.947

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ДИФФУЗИИ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ
КОНЦЕНТРАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И
ФУНКЦИЕЙ ИСТОЧНИКА**

**CONSTRUCTING THE APPROXIMATE SOLU-
TION OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM
FOR THE EQUATION OF DIFFUSION WITH
DEPENDING ON CONCENTRATION COEFFI-
CIENTS AND SOURCE FUNCTION**

Семенчин Евгений Андреевич
д. ф.-м. н., профессор

Semenchin Evgenie Andreevich
Dr.Sc.(Phys.-Math.), professor

*Кубанский государственный университет, Красно-
дар, Россия*

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Захаров Михаил Юрьевич
ведущий математик

Zaharov Michael Jurevich
leading mathematician

*ОАО «НПО «Промавтоматика», Краснодар, Рос-
сия*

"RPA" Promavtomatika», Krasnodar, Russia

В работе с помощью методики, основанной на дискретизации исходной задачи по времени и методе базисных потенциалов, построено приближенное решение второй двумерной задачи для уравнения диффузии с зависящими от концентрации коэффициентами и функцией источника. Приведен общий вид приближенного решения данной задачи. На конкретном примере показана сходимость приближенного решения задачи к точному

In the article with the help of a technique, based on discretization initial problem of time variable and the method of basic potentials, is constructed the approximate solution of the second two-dimensional problem for the equation of diffusion with depending on concentration coefficients and source function. The general view of the approximate solution of this problem is reduced. On concrete example convergence of the approximate solution of the problem to the exact is shown

Ключевые слова: МЕТОД БАЗИСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, ДИФфуЗИЯ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, НЕЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА

Keywords: THE METHOD OF BASIC POTENTIALS, BOUNDARY PROBLEMS WITH THE NONLINEAR EQUATIONS, THE DIFFUSION IN THE ISOTROPIC ENVIRONMENT, NONLINEAR SOURCE FUNCTION

Введение

Известно, что коэффициенты диффузии в жидкостях могут существенным образом зависеть от концентрации диффундирующего вещества [1]. Часто коэффициент диффузии линейно зависит от концентрации, но в некоторых случаях (например, в водных растворах метанола, этанола и ацетона) с увеличением концентрации он вначале уменьшается, а затем – возрастает [1, 2]. Также и функция источника в жидкости может зависеть от концентрации диффундирующего вещества. Например, с увеличением

концентрации вещества в окружающей источник среде величина его выбросов может уменьшаться.

Для описания процесса диффузии при вышеуказанных условиях используются краевые задачи для квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью [3-6]. Условия существования и единственности классических решений краевых задач для таких уравнений приведены в [6]. Однако их численное решение наталкивается на значительные трудности [7]. В данной работе методом, описанным в [8], будет построено в явном аналитическом виде приближенное решение второй краевой задачи для уравнения с нелинейно зависящими от концентрации коэффициентами и функцией источника.

1. Постановка задачи

Задача 1. Плоская вторая краевая задача, описывающая диффузию в изотропной среде в случае, когда коэффициент диффузии и функция источника зависят от концентрации диффундирующего вещества, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = f(w)\Delta w + f_w'(w) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] + g(w), \mathbf{x} \in G \subset R^2, \\ w = w_0(\mathbf{x}) \text{ и } \delta t = 0, \\ f(w) \frac{\partial w}{\partial n} = w_S(t, \mathbf{x}) \text{ и } \delta \Sigma. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2);$$

$w = w(t, x_1, x_2)$ - концентрация диффундирующего вещества,
 $c \geq w \geq a > 0, a = const, c = const$;

$f(w)$ - коэффициент диффузии, $d \geq f(w) \geq b > 0, b = const, d = const$;

$g(w)$ - функция источника, $e \geq g(w) > 0, e = const$;

$$w_s(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ на } \Sigma;$$

G - ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей Σ ;

$\frac{\partial}{\partial n}$ - дифференцирование по направлению внешней к G нормали.

Будем предполагать, что

$$\Sigma \in C^3, w_0 \in C^1(\bar{G}), w_s \in C_{t,x}^{1,2}((0, +\infty) \times \Sigma), f(w) \in C^2[a, c], g(w) \in C^1[a, c] \quad (1.2)$$

В этом случае классическое решение (1.1) существует и единственно [6].

Цель данной работы – с помощью методики, предложенной в [8], построить приближенное решение задачи (1.1).

2. Методика построения приближенного решения задачи 1

Будем дополнительно требовать выполнения условия непроницаемости границы для диффузии:

$$f(w) \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2.1)$$

оно позволяет использовать для приближенного решения нижеуказанной вспомогательной задачи (см. (2.3)) метод базисных потенциалов.

Процесс построения приближенного решения задачи (1.1) разобьем на два этапа [8].

2.1. Проведем дискретизацию задачи (1.1) по времени.

Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ - приближение решения задачи (1.1) в момент времени $t_k, k = 0, 1, \dots, t_0 = 0, \Psi_0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), t_{k+1} - t_k = t$. Используя неявную аппроксимационную схему, запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x}), k = 0, 1, \dots$, следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) - \Psi_k(\mathbf{x})}{t} = f(\Psi_{k+1}) \Delta \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) + f'_{\Psi_{k+1}}(\Psi_{k+1}) \left[\left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right)^2 \right] + g(\Psi_{k+1}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in G, \\ f(\Psi_{k+1}(\mathbf{x})) \frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2. Построим приближенное решение задачи (2.2).

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G, \\ \left. \frac{\partial \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $k = 0, 1, \dots$.

Приближенное решение (2.3) $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ будем искать методом точечных (базисных) потенциалов [9]. Известно, что решение задачи (2.3) определено с точностью до постоянного слагаемого. Это слагаемое определим, исходя из условия изменения массы примеси:

$$\int_G \left((\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x}) - t g(\Psi_k(\mathbf{x})) \right) d\mathbf{x} = 0, \quad (2.4)$$

которое вытекает из соотношения (2.1).

В дальнейшем будем считать, что в приближенном решении (2.3) постоянное слагаемое скорректировано и $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ удовлетворяет условию (2.4).

Начальное приближение $\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ правой части уравнения в (2.3) выбираем из $C^a(\bar{G})$ ($0 < a < 1$). Тогда при заданном граничном условии решение (2.3) при $i = 1$ существует и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10]). Последующие приближения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots$, в правой части уравнения из (2.3) определяются соотношением:

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x})}{t} - f'_{(\Psi_{k+1}^{(i)})_N} \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right) \left[\left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] - g \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right) \right\} / f \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right), \mathbf{x} \in G \quad (2.5)$$

На основании (1.2) для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (2.5), при заданном граничном условии, решение (2.3) также существует и принадлежит $C^2(\bar{G})$ ([10]).

Согласно формуле Грина и (2.3) для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (2.5) должно выполняться соотношение:

$$\int_G \Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \tag{2.6}$$

При необходимости корректируем $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ с помощью аддитивной постоянной так, чтобы выполнялось условие (2.6).

Процесс построения приближенных решений $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$ задачи (2.3) для приближений правой части уравнения (2.3), определяемых (2.5), завершаем для заданного $\epsilon > 0$ на l_{k+1} -й итерации, если выполнится неравенство

$$\|\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < \epsilon.$$

В этом случае полагаем

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx (\Psi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}))_N.$$

Используя результаты [9], приведем аналитический вид приближенного решения задачи (2.2):

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left[- \int_G \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} b_j(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ds_y \right], \tag{2.7}$$

где $A = 2p$, $\mathbf{x} \in G$; p , $\mathbf{x} \in \Sigma$; $c_j^{(k+1)}$ - коэффициенты, определяющие приближение неизвестной плотности логарифмического потенциала двойного слоя

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{y}): \Psi_{k+1}(\mathbf{y}) \approx \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} b_j(\mathbf{y}) \right); k = 0, 1, \dots;$$

$$b_j(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|} = \frac{(\mathbf{x}^j - \mathbf{y}, n_y)}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|^2}, \mathbf{y} \in \Sigma,$$

$$\mathbf{x}^j \notin \bar{G}, j = 1, 2, \dots, N.$$

3. Пример

Построим вышеописанным методом (с использованием среды Borland Delphi 7 и вычислительных библиотек компилятора Compaq Fortran) приближенное решение задачи (1.1) при $f(w) = w$, $g(w) = 1/(w^2 + 1)$.

Пусть область G представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат: $G = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;

$$w_0(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + 2;$$

$$w_s(t, x_1, x_2) = 0;$$

$$t \in [0, 1], \quad \text{шаг дискретизации по времени } t = 0, 1;$$

$$\|\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < e, \quad k = 0, 1, \dots, 9, \quad e = 10^{-1}.$$

Значения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ были вычислены с помощью (2.5) (во всех узлах интегрирования по G). В качестве первого приближения правой части уравнения в (2.3) для каждого временного слоя был выбран лапласиан решения, построенный на предыдущем временном слое:

$$\Delta \Psi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \Delta \Psi_k(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, \dots, 9,$$

где

$$\Delta \Psi_k(\mathbf{x}) = \Delta \left(\Psi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) \right)_N = \Phi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}), \quad \|\Phi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) - \Phi_k^{(l_{k+1})}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G})} < e,$$

$$k = 1, \dots, 9.$$

Приближенное решение (2.2) (см. (2.7)) в данном случае имеет вид:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left[- \int_G \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^{40} b_j^{(k+1)}(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ds_y \right], \quad (3.1)$$

где $k = 0, 1, \dots, 9$, $|\mathbf{x}^j| = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 40$.

Графики построенного приближенного (3.1) решения задачи (1.1) для различных моментов времени приведены на рисунках 1-6. Норма в $C(\bar{G})$ невязки уравнения в (2.2) имеет порядок 10^{-2} .

(Количество итераций: 7; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,07)

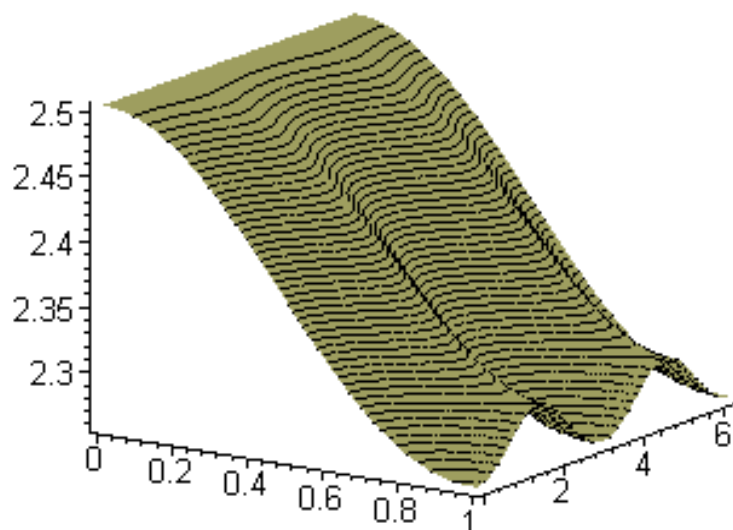


Рис. 1. Приближенное решение задачи 1 для $t=0,1$

(Количество итераций: 7; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,06)

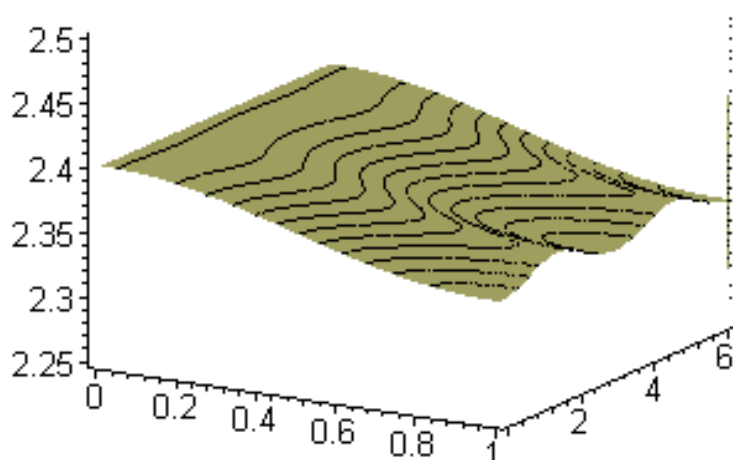


Рис. 2. Приближенное решение задачи 1 для $t=0,2$

(Количество итераций: 4; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,07)

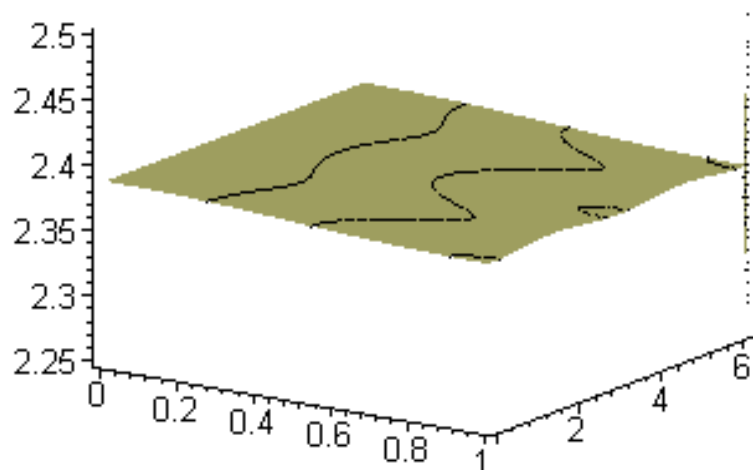


Рис. 3. Приближенное решение задачи 1 для $t=0,3$

(Количество итераций: 2; норма в $C(\bar{G})$ невязки:0,04)

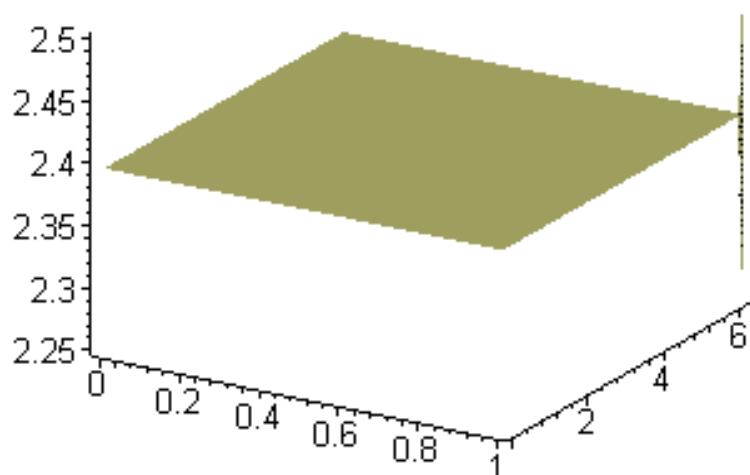


Рис. 4. Приближенное решение задачи 1 для $t=0,4$
(Количество итераций: 1; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,03)

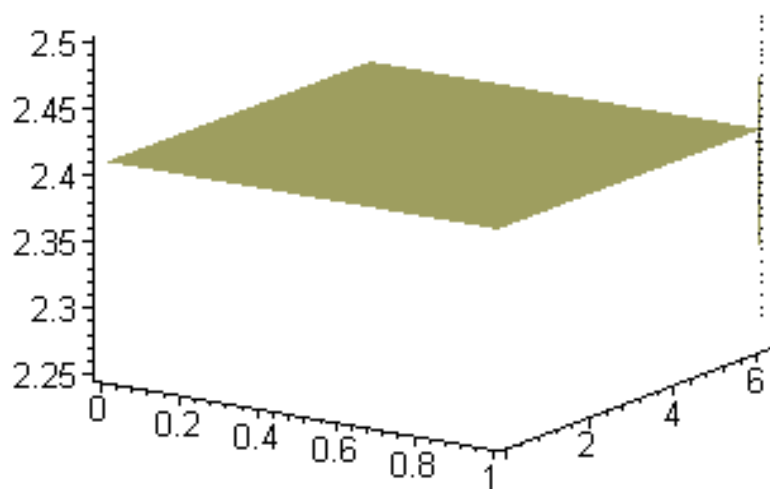


Рис. 5. Приближенное решение задачи 1 для $t=0,5$
 (Количество итераций: 1; норма в $C(\bar{G})$ невязки: 0,03)

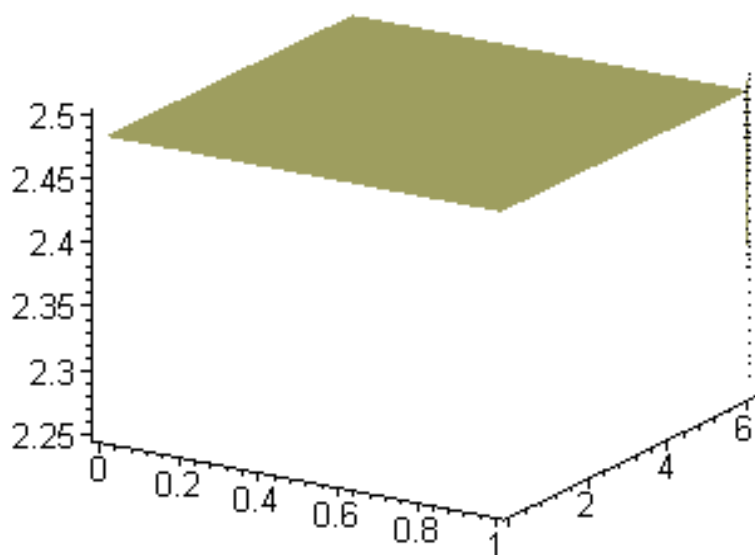


Рис. 6. Приближенное решение задачи 1 для $t=1$

Выводы

С помощью методики, основанной на дискретизации по времени исходной задачи и методе базисных потенциалов, предложенной в [8], построено приближенное решение нелинейной краевой задачи (1.1).

Приближенное решение (3.1) задачи (1.1) быстро сходится на рассматриваемом интервале времени: максимум модуля невязки порядка 10^{-2} достигается за 1-7 итераций (причем, для относительно большого шага дискретизации по времени: $t = 0,1$).

Литература

1. Бретшнайдер, С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер. – М.-Л.: Химия, 1966. – 535 с.
2. Шервуд, Т. Массопередача / Т. Шервуд. – М.: Химия, 1982. – 695 с.
3. Полянин, А.Д., Зайцев, В.Ф., Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
4. Годунов, С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1979 – 391 с.
5. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
6. Ладыженская, О.А., Солонников, В.А., Уральцева, Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. Построение приближенного решения краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в атмосфере, методом точечных потенциалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 4. с. 20-27.
9. Захаров М.Ю. Обратная задача определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя и применение к решению краевой задачи // Численный анализ: теория, приложения, программы. М.: МГУ, 1999. С. 113-120.
10. Ладыженская, О.А., Уральцева, Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. - 576 с.