

УДК 631.372:001.4

UDC 631.372:001.4

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЯГОВОЙ НАГРУЗКИ МТА**

**MATHEMATICAL MODELING OF MTU  
TENSILE LOAD**

Кравченко Владимир Алексеевич  
д.т.н., профессор

Kravchenko Vladimir Alekseevich  
Dr.Sci.Tech., professor

*Азово-Черноморский инженерный институт  
ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный  
университет», г. Зерноград, Россия*

*Azov-Black Sea engineering institute FSBHEEPT  
“Donskoy State Agrarian University”, Zernograd,  
Russia*

Дурягина Вероника Владимировна

Duryagina Veronika Vladimirovna

Гамолина Ирина Эдуардовна  
к.т.н., доцент

Gamolina Irina Eduardovna  
Cand.Tech.Sci.

*Южный Федеральный Университет, Таганрог,  
Россия*

*Southern Federal University, Taganrog, Russia*

В статье дан обзор результатов математического моделирования случайного процесса тяговой нагрузки серийного и опытного МТА. Обсуждается эффективность применения УДМ в трансмиссии трактора

The article is devoted to mathematical modeling of random process that occurred in tensile load of serial and experienced MTU. The efficiency of EDM application in transmission is discussed

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МАШИННО-ТРАКТОРНЫЙ АГРЕГАТ, ТЯГОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, УПРУГОДЕМПФИРУЮЩИЙ МЕХАНИЗМ, АППРОКСИМАЦИЯ, КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ, СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, MACHINE-TRACTOR UNIT, TRACTIVE RESISTANCE, ELASTICALLY DAMPING MECHANISM, APPROXIMATION, CORRELATION FUNCTION, RANDOM PROCESS

При выполнении машинно-тракторным агрегатом (МТА) энергоемких сельскохозяйственных работ на него действует постоянно изменяющаяся нагрузка, колебания которой достаточно велики и достигают 30 – 40% от крюкового усилия трактора.

Возникающие при эксплуатации МТА случайные колебания являются следствием усиления воздействия на МТА неровностей поля и неравномерности взаимодействия рабочих орудий с обрабатываемым материалом: интенсифицируются вертикальные колебания, усиливающие колебания нагрузки на крюке. Эти колебания воздействуют на работу двигателя, приводят к колебаниям остова, поскольку все ходовые системы современных тракторов имеют упругую подвеску и вызывают в деталях и

узлах переменные по величине напряжения [1, 3, 4]. Колебания тяговой нагрузки и силы сопротивления движению вызывают буксование движителей. Буксование влияет и на эксплуатационно-технологические показатели работы МТА [5].

Одним из способов решения проблемы является установка упругих виброгасителей в элементы и звенья машинно-тракторного агрегата.

Различные научные исследования [1, 2] показывают, что введение упругой связи в отдельные механизмы трактора позволяет снизить динамичность протекающих процессов. Эффективность применения упругодемпфирующих механизмов (УДМ) в трансмиссии объясняется тем, что содержащиеся в них упругие деформирующиеся элементы поглощают и рассеивают энергию колебаний тяговой нагрузки, снижая динамическую нагруженность привода, буксование движителей и т.д.

Представляется актуальным исследование влияния тягового сопротивления на работу МТА с УДМ в трансмиссии. Используемый УДМ[2] в трансмиссии МТА на базе МТЗ-80 является «частотным фильтром». Он ослабляет колебания, действующие на двигатель от внешних воздействий в определенном диапазоне частот, снижая наиболее выраженные гармоники внешних колебаний нагрузки на различных режимах работы трактора. Основные параметры УДМ можно варьировать, добиваясь снижения наиболее выраженных гармоник внешних колебаний нагрузки.

Для количественной оценки сопротивления почвы, которое преодолевается рабочими органами МТА при деформации и разрушении почвенного пласта, используется оценка выходного энергетического показателя работы – оценка тягового сопротивления МТА [3,4].

Тяговое сопротивление (нагрузка) сельскохозяйственных машин зависит от множества факторов, которые условно можно разделить на три

группы: конструктивные, почвенно-климатические и эксплуатационные [1, 3, 4].

Интенсивность колебаний нагрузки зависит от [3, 4]: типа машины-орудия (плуга, сеялки и др.) и ее характеристик (количества корпусов, ширины захвата и др.); технологического режима (глубины обработки, угла развала и др.); количества машин-орудий в агрегате; скорости движения агрегата; типа фона и его состояния; зональных условий (удельного сопротивления, глыбистости почвы, влажности и т.д.).

Движение рабочего органа МТА в необработанной почве сопровождается явлениями сжатия и разрушения пласта в различных направлениях, которые обуславливают беспорядочный характер изменения тягового сопротивления [5]. Тяговое сопротивление вследствие неоднородности плотности почвы имеет случайный характер.

Ряд авторов рассматривает тяговую нагрузку МТА как гармоническую функцию с варьирующейся в некоторых пределах частотой. Другие авторы, исследуя тяговое усилие, предлагают использовать некую функциональную зависимость, представляемую в виде пяти основных составляющих колебаний, различающихся между собой амплитудой и частотой [4].

В [1, 11] при исследовании тяговой нагрузки МТА с УДМ в трансмиссии трактора в качестве функции, характеризующей колебания тягового сопротивления применяется с дискретным набором частот  $f$  из диапазона, соответствующего определенной сельскохозяйственной операции.

Рассмотрим двумерный случай.

Уравнения движения агрегата и внешней нагрузки, колебания остова трактора в продольно-вертикальной плоскости описываются системой уравнений [1, 4]:

$$, \quad (1)$$

$$m_a \ddot{z}_c = c_r(z_1 - q_1) + \alpha_r(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_r(z_2 - q_2) + \alpha_r(\dot{z}_2 - \dot{q}_2), \quad (2)$$

$$J_c \ddot{\varphi}_c = [c_r(z_1 - q_1) + \alpha_r(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)]a - [c_r(z_2 - q_2) + \alpha_r(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)]b + T(\lambda)(r_{д1} + r_{д2} + 2h_{cr}) - P_c \quad (3)$$

где  $m_a$  – масса агрегата;

$z_c$  – отклонение по вертикали центра масс трактора от равновесного положения;

$z_1, z_2$  – отклонения по вертикали от положения равновесия центров переднего и заднего моста соответственно;

$q_1, q_2$  – реализация возмущающего воздействия со стороны микропрофиля на передний и задний мосты трактора;

$a, b$  – расстояния от центра тяжести до переднего и заднего мостов;

$P_c$  – тяговое сопротивление на рабочих органах;

$h_c$  – расстояние от линии действия силы тяги до центра масс трактора;

$h_{cr}$  – расстояние от центра колеса до центра масс трактора;

$\varphi_c$  – угол поворота остова трактора относительно поперечной горизонтальной оси, проходящей через центр масс трактора;

$J_c$  – момент инерции трактора относительно центра масс;

$T(\lambda)$  – усилие в контакте отпечатка шины;

$\lambda$  – продольная деформация шины.

Силу тягового сопротивления  $P_c(t)$  представим в виде [1, 4]:

где  $P_{c0}$  – равновесное значение силы сопротивления;

$k$  – экспериментальный коэффициент нарастания тягового сопротивления;

- скорость МТА;
- функция, характеризующая колебания тягового сопротивления и носящая случайный характер.

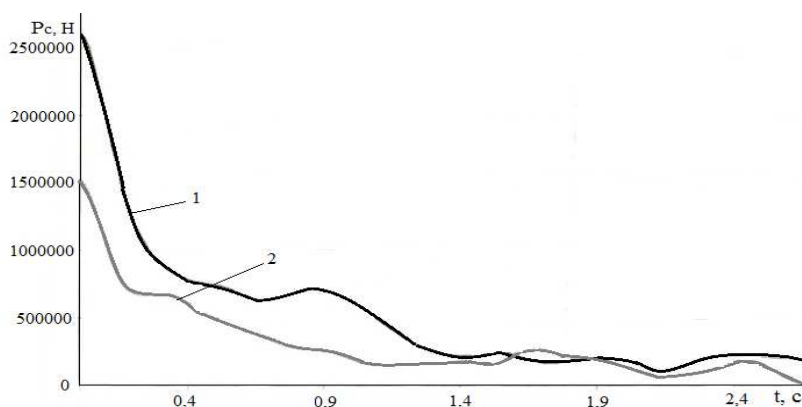
Основными этапами математического моделирования тяговой нагрузки являются: получение корреляционной функции экспериментальным путем; нормирование экспериментальной корреляционной функции; аппроксимация корреляционной функции; получение случайного процесса тяговой нагрузки по известной корреляционной функции.

Для описания тягового сопротивления воспользуемся статистическим подходом, учитывающим сложность реальных зависимостей, влияние внешних факторов, приближенность эмпирических измерений. В связи с этим колебания тягового сопротивления будем описывать вероятностными методами, пользуясь результатами натурных экспериментов. Для описания случайных процессов используются следующие статистические функции: среднее значение квадрата случайного процесса; плотность распределения; автокорреляционная функция; спектральная плотность.

Среднее значение квадрата дает элементарное представление об интенсивности процесса. Плотность распределения характеризует распределение вероятностей процесса в фиксированных точках. Автокорреляционная функция (АКФ) и спектральная плотность дают аналогичную информацию о процессе во временной и частотной областях соответственно [7]. Пусть колебания тяговой нагрузки происходят случайным образом только в вертикальной продольной плоскости. подчинена нормальному закону распределения и является случайной функцией, удовлетворяющей условиям стационарности. А.Я. Хинчин доказал теорему о том, что стационарные случайные процессы являются эргодическими [7].

Допущение об эргодичности стационарного случайного процесса позволяет предсказать все его статистические характеристики по одной реализации из ансамбля процесса с помощью усреднения.

Графики экспериментальной зависимости автокорреляционной функции для тяговой нагрузки с УДМ и без УДМ приведены на рисунке 1.



1 – серийный агрегат; 2 – агрегат с УДМ в трансмиссии

Рисунок 1 – Автокорреляционная функция тяговой нагрузки  
(экспериментальные зависимости)

При проведении натурального эксперимента получаемая автокорреляционная функция имеет погрешности разного вида, поэтому при моделировании исследуемой функции целесообразно применять не интерполяционные, а аппроксимирующие подходы, основанные на интегральной близости. Имея результаты натуральных испытаний в виде автокорреляционной функции, стоит задача аппроксимации с целью моделирования случайного процесса тяговой нагрузки. Существуют различные подходы к аппроксимации, в частности [7]: функциями заданного вида, разложением корреляционной функции в ряд по ортогональным функциям или по дисперсиям производных. При этом в качестве критерия приближения чаще всего используют минимум квадратичной погрешности аппроксимации, минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации и критерий равномерного приближения. Наиболее приемлемыми доступным является метод наименьших квадратов с оценкой аналитического выражения для автокорреляционной функции и

ее последующая аппроксимация с минимумом квадратичной погрешности.

Как показывают исследования [3, 7], для характеристики случайных процессов обычно применяют затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные автокорреляционные функции.

Для аппроксимации нормированной АКФ использовалось аналитическое выражение вида:

$$R(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} \cos \beta t + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (4)$$

где  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta$  – коэффициенты, оцененные с помощью метода наименьших квадратов в пакете прикладных программ MathCad.

Наилучшие результаты (по «невязке») для операции «пахота» приведены ниже.

Таблица 1– Коэффициенты аппроксимации нормированной АКФ тяговой нагрузки серийного и опытного МТА

Наличие УДМ	$A_1$	$A_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$
–	0,208	0,792	1,391	1,211	6,583
+	0,725	0,275	4,597	0,291	0,319

Следующий этап исследования заключается в моделировании случайного процесса тяговой нагрузки МТА по заданной корреляционной функции.

Наиболее часто применяемым способом для получения дискретных значений случайного процесса в моменты времени, связанные с шагом дискретизации, является построение характеристик формирующего фильтра, описываемых уравнением Виннера-Хинчина [7]. Данное уравнение связывает спектральные плотности входного и выходного процессов линейной динамической системы с помощью частотной передаточной функции. Для построения случайного процесса используются следующие подходы:

решение системы однородных дифференциальных уравнений [8] формирующего фильтра;

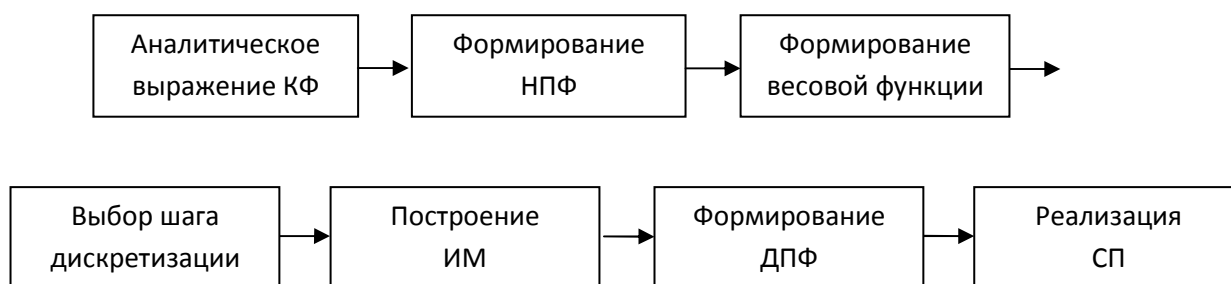
использование интеграла свертки, заменяемого суммой при малом шаге дискретизации [6];

применение стохастического разностного уравнения, полученного на основе использования теории непрерывных дробей [9].

Недостатками первых двух методов являются отсутствие взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями, теоретически необоснованный выбор шага дискретизации [9].

Наиболее целесообразным, достаточно эффективным и простым в реализации является алгоритм моделирования стационарного случайного процесса на основе непрерывных дробей.

На рисунке 2 приведена схема, поясняющая суть метода:



КФ – корреляционная функция; НПФ – непрерывная передаточная функция; ИМ – идентификационная матрица В. Висковатова; ДПФ – дробно-передаточная функция; СП – случайный процесс

Рисунок 2 - Алгоритм моделирования на основе непрерывных дробей.

В рассматриваемом случае нормированной корреляционной функции вида(4) соответствует НПФ формирующего объекта:

$$G(s) = \frac{A(s^2 + u_1s + u_0)}{(s^2 + v_1s + v_0)(s + v_2)},$$

(5)

где  $s = i\omega$ ,  $A$ ,  $u_i$  ( $i = 0,1$ ),  $v_j$  ( $j = 0,1,2$ ) – действительные функции, зависящие от  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ .



Непрерывная передаточная функция  $G(s)$  имеет два нуля:  $s_{1,2}^0 = \gamma_1 \pm \theta_1 i$  и три полюса:  $s_{1,2}^1 = \gamma_2 \pm \theta_2 i$ ,  $s_3^1 = -\nu_2$ , где  $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2$  – действительные числа. С помощью обратного преобразования Лапласа перейдем к весовой функции формирующего объекта

$$h(t) = \mu_1 e^{-\nu_2 t} + \mu_2 e^{\gamma_2 t} \cos \theta_2 t + \mu_3 e^{\gamma_2 t} \sin \theta_2 t, \quad (6)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – действительные коэффициенты.

Шаг дискретизации  $\Delta t$  выбираем из условия SP-идентифицируемости [9] для получения взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями:

$$\Delta t \max|\theta_1, \theta_2| < \pi. \quad (7)$$

Так как  $h(0) \neq 0$ , то идентифицирующая матрица (модифицированный алгоритм В. Висковатова) имеет вид:

1	0	0	0	0	0
$h(0)$	$h(\Delta t)$	$h(2\Delta t)$		$h(n\Delta t)$	
$\alpha_1(0)$	$\alpha_1(\Delta t)$	$\alpha_1(2\Delta t)$		$\alpha_1(n\Delta t)$	
$\alpha_m(0)$	$\alpha_m(\Delta t)$	$\alpha_m(2\Delta t)$		$\alpha_m(n\Delta t)$	

(8)

где

$$\alpha_m(n\Delta t) = \frac{\alpha_{m-2}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-1}(0)}, \quad (9)$$

$$\alpha_{-1}(n\Delta t) = \delta(n\Delta t), \alpha_0(n\Delta t) = h(n\Delta t), m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ограничимся вычислениями элементов матрицы при появлении первой «нулевой» строки.

На основе идентифицирующей матрицы с формируем ДПФ:

$$G(z) = \frac{h(0)}{1 + \frac{\alpha_1(0) \cdot z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_2(0) \cdot z^{-1}}{1 + \dots}}} \quad (10)$$

После преобразования для нашего случая ДПФ примет вид:

$$G(z) = \frac{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}{b_3 z^{-3} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + 1} \quad (11)$$

Дискретная модель случайного процесса в форме стохастического разностного уравнения имеет вид:

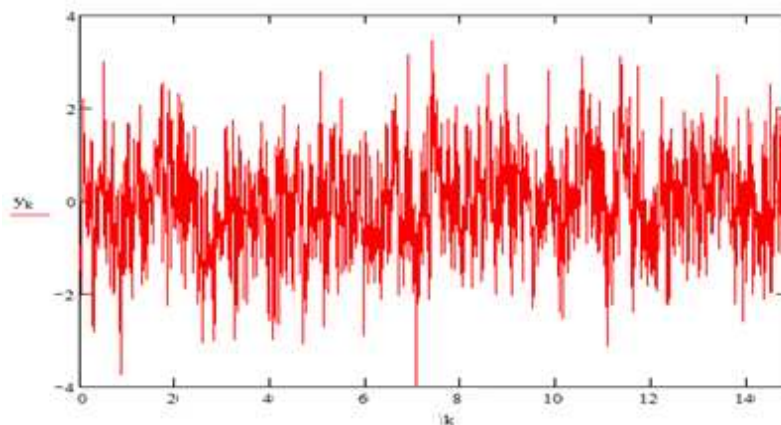
$$y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^2 a_i x((k-i)\Delta t) - \sum_{i=1}^3 b_i y((k-i)\Delta t) \quad (12)$$

Здесь  $y(t)$  – искомый случайный процесс,  $x(t)$  – «белый шум», с корреляционной функцией вида  $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$  Согласно [9] математические ожидания  $M_x = M_y = 0$ , дисперсии  $D_x$  и  $D_y$  связаны через коэффициенты модели  $a_i$  и  $b_i$ .

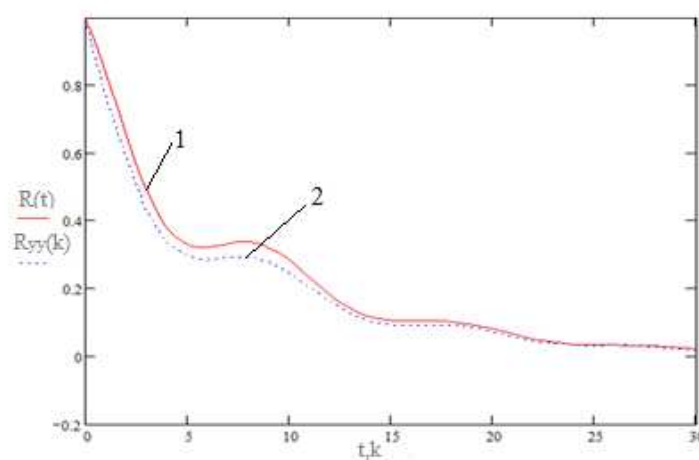
«Белый шум» применяется в тех случаях, когда интервал корреляции шума много меньше всех существенных постоянных времени системы, на которую воздействует шум, и спектральную плотность внешних воздействий можно приближенно считать постоянной. Использование белого шума позволяет упростить математические выкладки. В работе [10] был применен «белый шум» для моделирования тяговой нагрузки МТА.

Имея смоделированный случайный процесс, построим модельную корреляционную функцию  $R_{yy}(k)$  [11] для контроля полученных результатов.

На рисунках 3 и 4 представлены результаты математического моделирования: реализации случайных процессов (а) и соответствующие им автокорреляционные функции (б) тяговой нагрузки серийного и опытного МТА.



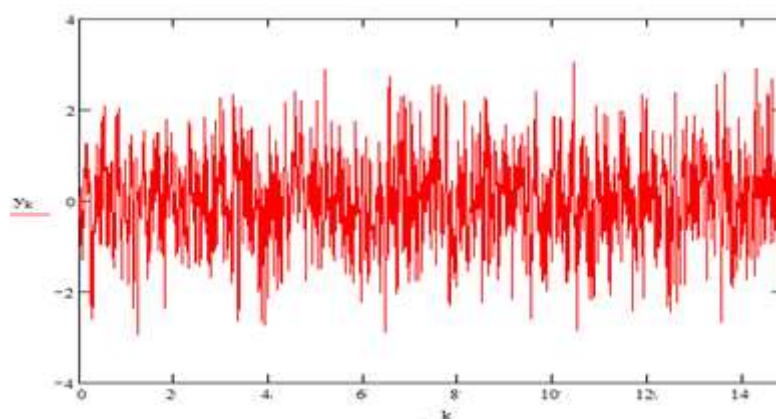
а) Реализация случайного процесса тяговой нагрузки серийного МТА.



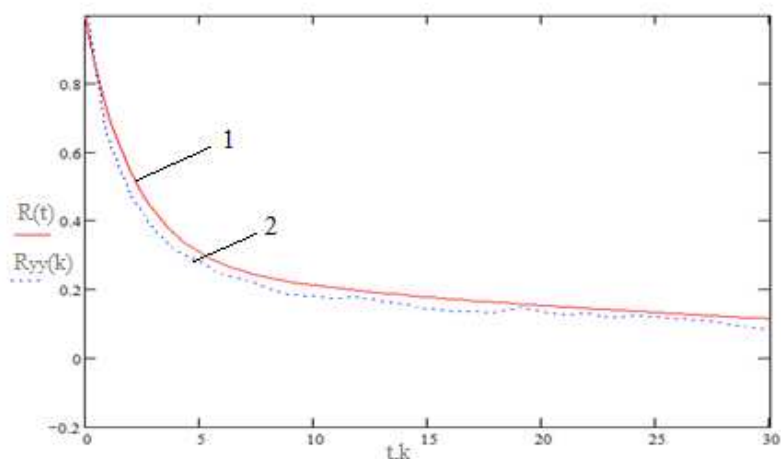
1 – Аппроксимация; 2 – Результат численного моделирования

б) – Нормированная АКФ тяговой нагрузки серийного МТА.

Рисунок 3 – Результаты математического моделирования тяговой нагрузки серийного МТА.



а) Реализация случайного процесса тяговой нагрузки опытного МТА.



1 – Аппроксимация; 2 – Результат численного моделирования  
 б) – Нормированная АКФ тяговой нагрузки опытного МТА.

Рисунок 4 – Результаты математического моделирования тяговой нагрузки опытного МТА.

Анализ результатов математического моделирования показал, что используемый метод дает хорошую согласованность модельной и аппроксимированной АКФ. Таким образом, полученные дискретные модели случайного процесса тяговой нагрузки серийного и опытного МТА применимы для исследования движения агрегата, влияния воздействия внешней нагрузки, эффективности применения УДМ в трансмиссии трактора на эксплуатационные показатели.

Полученные данные могут быть использованы при построении модели функционирования МТА.

### Литература

1. Кравченко, В.А. Повышение динамических и эксплуатационных показателей сельскохозяйственных машинно-тракторных агрегатов: монография / В.А. Кравченко. – Волгоград: ФГОУ ВПО АЧГАА. – 2010. – 224 с.
2. Кравченко В.А., Сенкевич А.А., Сенкевич С.Е., Дурыгина В.В., Гончаров Д.А. Патент на изобретение RU 2398147 C1 // Устройство для снижения жесткости трансмиссии машинно-тракторного агрегата // Бюл. №24, 2010.
3. А.Б. Лурье Статистическая динамика сельскохозяйственных агрегатов.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Колос, 1981. – 382 с.
4. Кутьков Г.М. Тяговая динамика тракторов// Г.М. Кутьков. – М. : Машиностроение, 1980. – 216 с.
5. Кравченко В.А., Дурыгина В.В., Гамолина И.Э. Уменьшение техногенного воздействия на почву ходовой системой машинно-тракторного агрегата// Труды

- VIII Международной научно-практической конференции «Дни науки - 2012», Чехия, г. Прага, март 2012, с. 11-13.
6. Рыков С.П. Моделирование случайного микропрофиля автомобильных дорог // С.П.Рыков, Р.С.Бекирова, В.С. Коваль [электронный ресурс] [http://brstu.ru/static/unit/journal\\_system/docs/number8/33-37.pdf](http://brstu.ru/static/unit/journal_system/docs/number8/33-37.pdf)
  7. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов // Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 329 с.
  8. Белецкий А.В. Моделирование профиля дорожного основания в задаче анализа динамики трансмиссии колесной машины / А.В. Белецкий // Электронное издание СДМ – Строительные Дорожные Машины и Техника [электронный ресурс]. – Москва: <http://sdm.str-t.ru/insertfiles/5.pdf>
  9. Карташов В.Я., Новосельцева М.А. Цифровое моделирование стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией на основе непрерывных дробей / В.Я. Карташов, М.А. Новосельцева // УБС, 31 (2010), 49–91 с.
  10. Степанов В.Е. Влияние колебаний МТА на его энергетические показатели (на примере пахотного агрегата К-701+ПТК-9-35) / В.Е. Степанов // Дис... к. техн. наук. – М., 1985. – 158 с.
  11. Кравченко, В.А. Исследование влияния упругодемпфирующего механизма на показатели работы посевного машинно-тракторного агрегата / В.А. Кравченко, А.А. Сенькевич, С.Е. Сенькевич // Механизация и электрификация сельского хозяйства, 2007. – № 11, 21 – 23 с.

### References

1. Kravchenko, V.A. Povyshenie dinamicheskikh i jekspluatacionnyh pokazatelej sel'skohozjajstvennyh mashinno-traktornyh agregatov: monografija / V.A. Kravchenko. – Zernograd: FGOU VPO AChGAA. – 2010. – 224 s.
2. Kravchenko V.A., Senkevich A.A., Senkevich S.E., Durjagina V.V., Goncharov D.A. Patent na izobrenenie RU 2398147 C1 // Ustrojstvo dlja snizhenija zhestkosti transmissii mashinno-traktornogo agregata // Bjul. №24, 2010.
3. A.B. Lur'e Statisticheskaja dinamika sel'skohozjajstvennyh agregatov.- 2-e izd., pererab. idop.- M.: Kolos, 1981. – 382 s.
4. Kut'kov G.M. Tjagovaja dinamika traktorov // G.M. Kut'kov. – M. : Mashinostroenie, 1980. – 216 s.
5. Kravchenko V.A., Durjagina V.V., Gamolina I. Je. Umen'shenie tehnogenogo vozdejstvija na pochvu hodovoj sistemoj mashinno-traktornogo agregata // Trudy VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Dni nauki - 2012», Chehija, g. Praga, mart 2012, s. 11-13.
6. Rykov S.P. Modelirovanie sluchajnogo mikroprofilja avtomobil'nyh dorog // S.P. Rykov, R.S. Bekirova, V.S. Koval' [jelektronnyj resurs] [http://brstu.ru/static/unit/journal\\_system/docs/number8/33-37.pdf](http://brstu.ru/static/unit/journal_system/docs/number8/33-37.pdf)
7. Prohorov S.A. Approksimativnyj analiz sluchajnyh processov // Samarskij gosudarstvennyj ajerokosmicheskij universitet, 2001. – 329 s.
8. Beleckij A.V. Modelirovanie profilja dorozhnogo osnovanija v zadache analiza dinamiki transmissii kolesnoj mashiny / A.V. Beleckij // Jelektronnoe izdanie SDM – Stroitel'nye Dorozhnye Mashiny i Tehnika [jelektronnyj resurs]. – Moskva: <http://sdm.str-t.ru/insertfiles/5.pdf>

9. Kartashov V.Ja., Novosel'ceva M.A. Cifrovoe modelirovanie stacionarnyh sluchajnyh processov s zadannoju korreljacionnoju funkciej na osnove nepreryvnyh drobej / V.Ja. Kartashov, M.A. Novosel'ceva // UBS, 31 (2010), 49–91 s.
10. Stepanov V.E. Vlijanie kolebanij MTA na ego jenergeticheskie pokazateli (na primere pahotnogo agregata K-701+PTK-9-35) / V.E. Stepanov // Dis... k. tehn. nauk. – M., 1985. – 158 s.
11. Kravchenko, V.A. Issledovanie vlijanija uprugodempfirujushhego mehanizma na pokazateli raboty posevnogo mashinno-traktornogo agregata / V.A. Kravchenko, A.A. Sen'kevich, S.E. Sen'kevich // Mehanizacija i jelektrifikacija sel'skogohozjajstva, 2007. – № 11, 21 – 23 s.