

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСТИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА**SIMULATION OF TURBULENT FLOW IN A CAVITY ON THE NAVIER-STOKES EQUATIONS**Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада*Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В работе рассматриваются численные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие турбулентные течения в полости в форме прямоугольника или прямоугольного параллелепипеда (кубоида) с одной открытой гранью при больших числах Рейнольдса. Известно, что в природных системах существует механизм турбулентного перемешивания, ведущий к увеличению вязкости сплошной среды. В этой связи предлагаются методы регуляризации уравнений Навье-Стокса, аналогичные природным механизмам перемешивания. Сформулированы модели течений с учетом свойств турбулентной среды. Предложена модификация уравнения неразрывности с учетом конечной величины пульсаций давления. Показано, что за счет пульсаций давления условие не сжимаемости может нарушаться даже для течений с малыми числами Маха. Модификация уравнения неразрывности в системе уравнений Навье-Стокса путем введения турбулентной вязкости позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами. Показано, что модификация уравнения неразрывности с учетом турбулентных пульсаций приводит к системе нелинейных уравнений параболического типа. Построена численная модель турбулентного течения в кубоиде при быстром изменении параметров внешнего течения. Обнаружен тип неустойчивости турбулентного течения, связанный с быстрым изменением скорости основного течения. В численных расчетах установлено, что при ускорении внешнего потока в полости формируется нестационарное вихревое течение, которое характеризуется не затухающим со временем интегралом энергии, параметры колебания которого зависят от величины турбулентной вязкости

The article deals with the numerical solution of the Navier-Stokes equations describing turbulent flow in a rectangle cavity or in a cuboid with one open face at high Reynolds numbers. It is known, that there is a mechanism of turbulent mixing in natural systems, leading to an increase in the viscosity of the continuous medium. In this regard, we suggest methods of regularization of the Navier-Stokes equations, similar to the natural mechanisms of mixing. We proposed the models based on the properties of the turbulent environment. For this we modified the continuity equation taking into account the pressure fluctuations. It is shown that the incompressibility condition is can be violated due to pressure fluctuation even for flows with low Mach numbers. Modification of continuity equation by the introduction of turbulent viscosity allows the regularization of the Navier-Stokes equations to solve the problems with rapidly changing dynamic parameters. It was shown that the modification of the continuity equation taking into account turbulent fluctuations leads to a system of nonlinear equations of parabolic type. A numerical model of turbulent flow in the cavity with the rapid change in the parameters of the main flow developed. Discovered type of instability of the turbulent flow associated with the rapid changes in the main flow velocity. In numerical simulations found that due to the acceleration of the main flow there is the unsteady vortex flow in the cavity, which is characterized by the integral of energy not vanishing with time, vibrations that have a certain period, depending on the turbulent viscosity

Ключевые слова: УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Keywords: NAVIER-STOKES, TURBULENCE

Введение

В работах [1-7] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений над шероховатой поверхностью. Основные результаты, касающиеся неизотермических потоков с учетом силы плавучести, были получены в наших работах [1-6] и других. В работе [7] рассмотрено общее соотношение для плотности, скорости и давления в турбулентных потоках, которое позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса при числе Маха $M \rightarrow 0$, что соответствует несжимаемому течению. Было показано, что исключение уравнения неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ из системы уравнений Навье-Стокса и введение турбулентной вязкости в форме уравнения, связывающего давление и дивергенцию скорости, позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами.

Основной результат, который получен при численном интегрировании регуляризированной системы уравнений [7] - это устойчивость численного алгоритма при числах Рейнольдса, $Re \geq 10^6$, что объясняется, в первую очередь, параболическим типом системы и большой величиной турбулентной вязкости. К сожалению, ввиду отсутствия теоремы существования и единственности для решений системы уравнений Навье-Стокса, остается вопрос о единственности полученных решений.

Как известно, вопрос о единственности и гладкости решений уравнений Навье-Стокса был сформулирован в виде шестой проблемы тысячелетия [8-9]. Для этой проблемы имеются, как математические доказательства существования и единственности решения задачи с периодическими граничными условиями [10-11], так и доказательства потери единственности решений при взрывной неустойчивости за конечное время [12].

Столь противоречивые результаты, с учетом того, что шестую проблему тысячелетия исследовали многие выдающиеся математики [8-9], не может не вызвать удивления. Следует отметить, что решение шестой проблемы тысячелетия еще не гарантирует, что систему уравнений Навье-Стокса можно применить для прямого численного моделирования турбулентности.

В работе [7] рассмотрена модель турбулентного течения в пограничном слое на крыле при быстром изменении угла атаки. Обнаружен тип неустойчивости турбулентного пограничного слоя связанный с быстрым изменением динамических параметров. Показано, что колебания пограничного слоя приводят к генерации звука с частотой от 100 Гц до 1 кГц. В настоящей работе развита численная модель турбулентного течения в полости в форме прямоугольника или прямоугольного параллелепипеда при ускорении внешнего потока. Установлено, что в этом случае в полости формируется вихревое течение, которое характеризуется не затухающим со временем интегралом энергии.

Уравнения Навье-Стокса и проблема моделирования турбулентных течений над шероховатой поверхностью

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом сил плавучести и переноса инертной примеси, имеем [1-7]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: ρ - плотность воздуха; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $\text{Sc} = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g}\rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0\beta(T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$ - рис. 1.

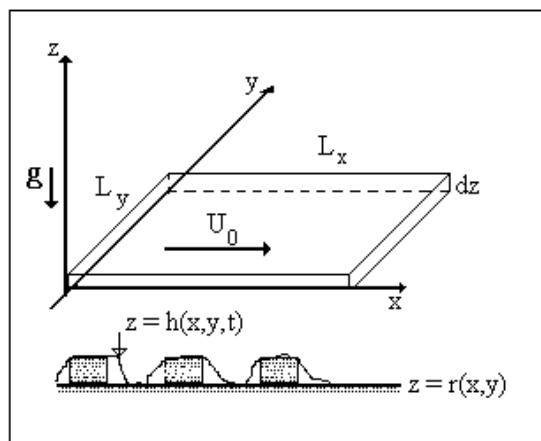


Рис.1. Геометрия течения над шероховатой поверхностью.

Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} = U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (4)$$

Решения задачи (1)-(4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [1-7] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси

Этот факт, установленный во многих исследованиях [13], показывает, что природа изобрела наиболее экономичный способ движения в форме логарифмического профиля. Однако если логарифмический профиль подставить во второе уравнение (1), то можно убедиться, что это уравнение не выполняется. Такой результат означает, что в природе существуют силы, которые поддерживают логарифмический профиль, но которые не нашли отражения в уравнениях (1). Обычно происхождение этих сил приписывают так называемым напряжениям Рейнольдса, обусловленным турбулентной вязкостью или диффузией [13-14].

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [1-7]. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость [1-6].

Предполагается, что такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_t, h_x, h_y , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Очевидно, что $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ является случайной функцией, поскольку зависит от случайных параметров. Уравнения, описывающие динамику

$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$, следуют из уравнений (1) и (5), а их вывод дан в [3-5].

Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (23) принимает вид [3-5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Sch}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Sch}^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_t + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [2-7].

Модель турбулентной среды

Методы прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) опираются непосредственно на систему уравнений (1). При этом для вычисления профиля скорости часто используется приближенный метод Галеркина или метод моментов, а также метод Ритца и другие приближенные

методы [8-12]. В частности, в работе [12] используется усредненная система уравнений Навье-Стокса. В этом смысле использованное нами разложение (4)-(5) можно рассматривать как один из таких приближенных методов.

Теорема существования и единственности [8-12] касается именно приближенного, а не точного решения. При этом формулировка теоремы подразумевает и описание приближенного метода решения. Например, при нахождении решения задачи (1)-(4) по методу Галеркина нельзя гарантировать существование хотя бы одного решения, а если приближенное решение существует, то нельзя гарантировать, что оно сходится к точному решению. Теоремы, сформулированные в работах [10-11] устраняют эти недостатки приближенных методов, которые широко применяются при решении прикладных задач гидродинамики и аэродинамики.

Но даже при наличии приближенного метода решения прямое численное моделирование турбулентности не всегда приводит к желаемому результату, так как система уравнений (1), сформулированная для несжимаемых течений, содержит в себе противоречие. Действительно, при выводе этой системы уравнений предполагается, что плотность среды не меняется, а это, в свою очередь, означает малость числа Маха потока [14]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \quad (8)$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, на таких решениях, которые описаны в работе [12], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы уравнений (1) не изменился при всех ее модификациях. Известно множество способов регуляризации системы уравнений (1), как по давлению, так и по градиенту скорости [8-12, 15].

Рассмотрим следующий подход к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (1). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок $M^2 \omega_0$, где ω_0 – характерная частота пульсаций давления. При выполнении условия (8) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (1). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, что бы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством $M^2 \omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = P \\ \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим P_0 . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\omega_0(P - P_0) \quad (13)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha\omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме [8-12]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x_i)$ – вектор объемных сил. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Наконец, мы можем записать систему уравнений (1) в форме системы уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Параметр турбулентной диффузии в модели (17) имеет ясный физический смысл, как и происхождение напряжений Рейнольдса. Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [7].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla(\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая модель [1-6].

Уравнение (18) было использовано в настоящей работе для моделирования турбулентного течения в прямоугольной полости при ускорении внешнего потока.

Численная модель 2D течения в прямоугольной полости

Рассмотрим двумерное нестационарное течение в прямоугольной полости между выступами шероховатости – рис. 1. Запишем уравнение (18) для этого случая в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= \nu \nabla^2 u + \frac{1}{\rho_0} \nabla_x (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w &= \nu \nabla^2 w + \frac{1}{\rho_0} \nabla_z (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь мы полагаем все функции зависящими от времени и двух координат $u = u(t, x, z)$, $w = w(t, x, z)$, $\mathbf{v} = (u, 0, w)$. Сформулируем задачу о течении в прямоугольной полости $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq z \leq L_z$ при заданной скорости внешнего потока $\mathbf{v}_0(t, x)$ на верхней границе полости:

$$\begin{aligned} u(0, x, z) &= 0, \quad w(0, x, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq z \leq L_z; \\ u(t, 0, z) &= u(t, L_x, z) = 0, \quad w(t, 0, z) = w(t, L_x, z) = 0; \\ u(t, x, 0) &= 0, \quad w(t, x, 0) = 0, \\ u(t, x, L_z) &= u_0(t, x), \quad w(t, x, L_z) = w_0(t, x). \end{aligned} \quad (20)$$

Ниже в расчетах мы использовали следующие функции, описывающие внешнее течение:

$$\begin{aligned} u_0 &= U_0 (1 - e^{-t}) \tanh(kx) \tanh[k(L_x - x)], \\ w_0 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Такая форма профиля выбирается из соображений согласования начальных и граничных условий (20). Число Рейнольдса задачи (19)-(21) определяется по формуле $Re = L_x U_0 / \nu$. В численных расчетах мы полагали $U_0 = 1, k = 100$, хотя форма профиля практически не влияет на течение в полости уже для $k \approx 10$.

Таким образом, параметрами задачи являются размеры полости и две вязкости, фигурирующие в модели (19). Для описания эволюции течения в полости используем интеграл энергии

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (u^2 + w^2) dx dz \quad (22)$$

Заметим, что давление в данной модели определяется из уравнения (14) в виде

$$P = P_0 - \mu_T \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (23)$$

На рис. 2 представлены данные моделирования течения в прямоугольной полости с числом Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$ и с параметрами вязкости $\nu = 0.001$, $\mu_T / \mu = 10^4$. Из приведенных данных следует, что при ускорении внешнего потока в полости формируется нестационарное вихревое течение, которое характеризуется не затухающим со временем интегралом энергии.

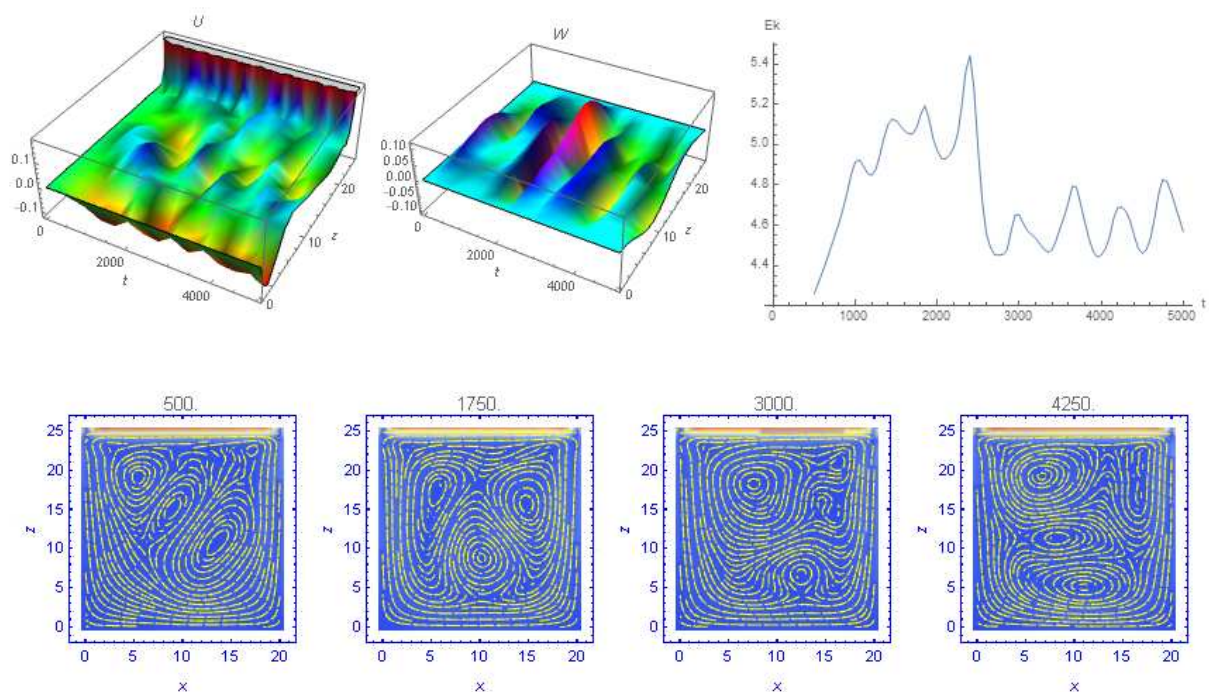


Рис. 2. Турбулентное течение в прямоугольной полости: сверху - пространственно-временное распределение составляющих скорости течения в сечении $x = L_x / 2$ и зависимость кинетической энергии потока от времени; внизу – линии тока течения, иллюстрирующие вихревой характер течения (цифры над рисунками соответствуют времени). Параметры модели (19)-(21): $L_x = 20, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 10^4$.

Из приведенных на рис 2 данных следует, что структура течения в полости определяется крупными вихрями, которые взаимодействуя между собой, создают колебания параметров течения, включая давление. Такого рода колебания параметров в полости при известных условиях резонанса могут приводить к генерации звука.

Проблема генерации звука в турбулентных течениях и возбуждение турбулентности звуком рассматривалась многими авторами [7, 16-19]. Модель турбулентного течения в полости (19)-(21), позволяет объяснить возникновение звука при дозвуковом обтекании различных углублений на крыльях и фюзеляже самолетов, при движении автомобилей, а также завывание ветра при обтекании дымовых труб и т.п.

Считается, что основной формой колебаний в пограничном слое являются волны Толлмина-Шлихтинга [13, 16-17]. Развита в настоящей работе модель описывает волны, возникающие в турбулентном течении в полости при ускорении потока. Параметры колебаний в полости существенно зависят от величины турбулентной вязкости. Так, при уменьшении турбулентной вязкости на порядок, при сохранении всех других начальных данных в задаче (19)-(21), колебания параметров течения в полости затухают со временем – рис. 3.

Такое поведение объясняется тем, что кинетическая энергия и амплитуда скорости течения возрастают при увеличении турбулентной вязкости, что непосредственно следует из сравнения данных на рис. 2 и 3. Такое парадоксальное увеличение скорости в более вязком, на первый взгляд, течении, объясняется тем, что турбулентная вязкость в относительных единицах является большим по величине параметром в модели (19). Тем

самым создаются условия для возбуждения колебаний скорости большой амплитуды.

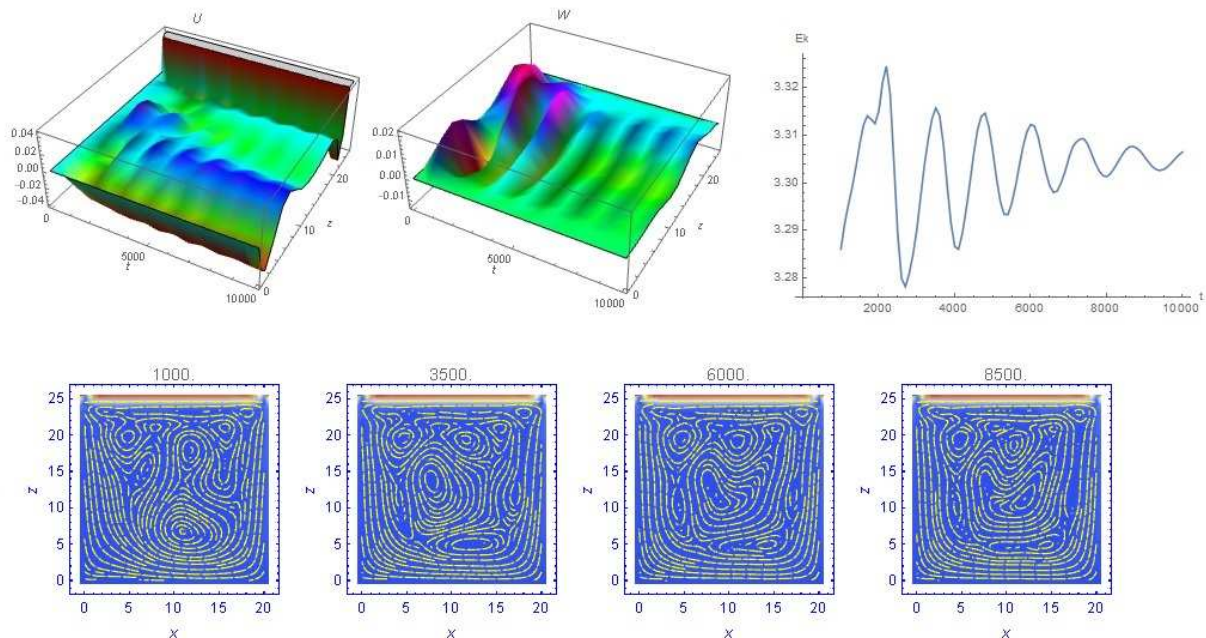


Рис. 3. Затухание колебаний параметров турбулентного течения в прямоугольной полости: сверху - пространственно-временное распределение составляющих скорости течения в сечении $x = L_x/2$ и зависимость кинетической энергии потока от времени; внизу – линии тока течения, иллюстрирующие вихревой характер течения. Параметры модели (19)-(21): $L_x = 20, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 10^3$.

Действительно, повышение турбулентной вязкости в полтора раза приводит пропорциональному увеличению кинетической энергии потока в полости – рис. 4. Однако дальнейшее повышение турбулентной вязкости приводит к развитию численной неустойчивости, что объясняется замкнутым характером течения в полости в модели (19)-(21). Но если при этом увеличить глубину полости, то течение стабилизируется – рис.5.

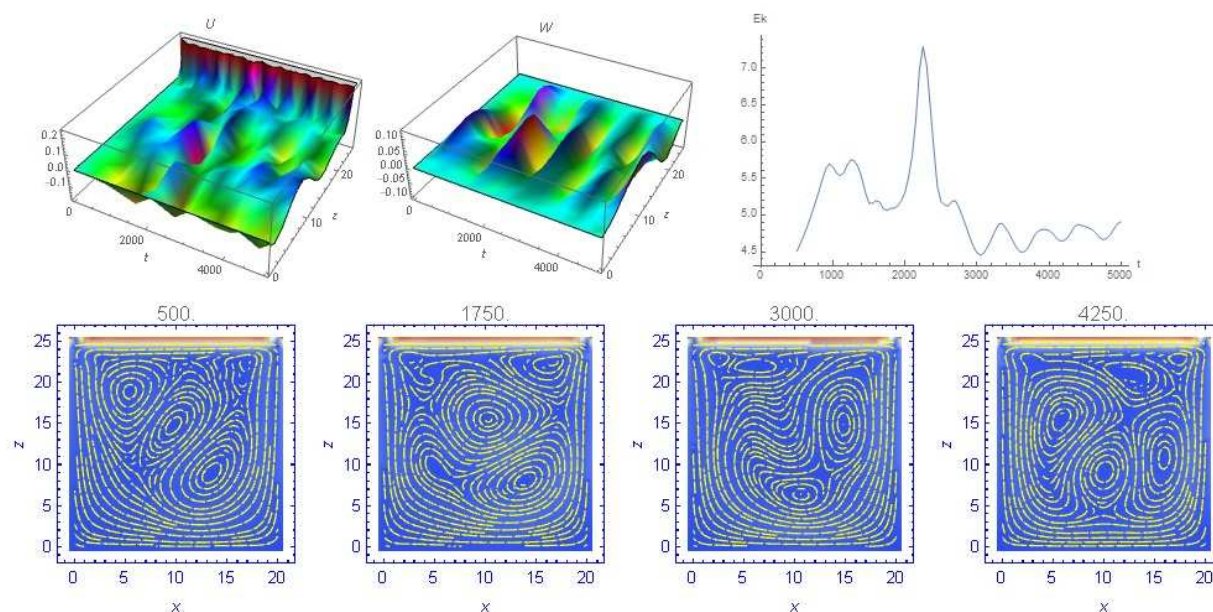


Рис. 4. Турбулентное течение в прямоугольной полости: сверху - пространственно-временное распределение составляющих скорости течения в сечении $x = L_x / 2$ и зависимость кинетической энергии потока от времени; внизу – линии тока течения, иллюстрирующие вихревой характер течения. Параметры модели (19)-(21): $L_x = 20, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 1.5 \cdot 10^4$.

На рис. 5 приведены данные моделирования турбулентного течения в глубокой полости при соотношении размеров $L_z / L_x = 4$. В этом случае вихревое течение проникает на всю глубину, создавая значительные колебания давления в придонной области.

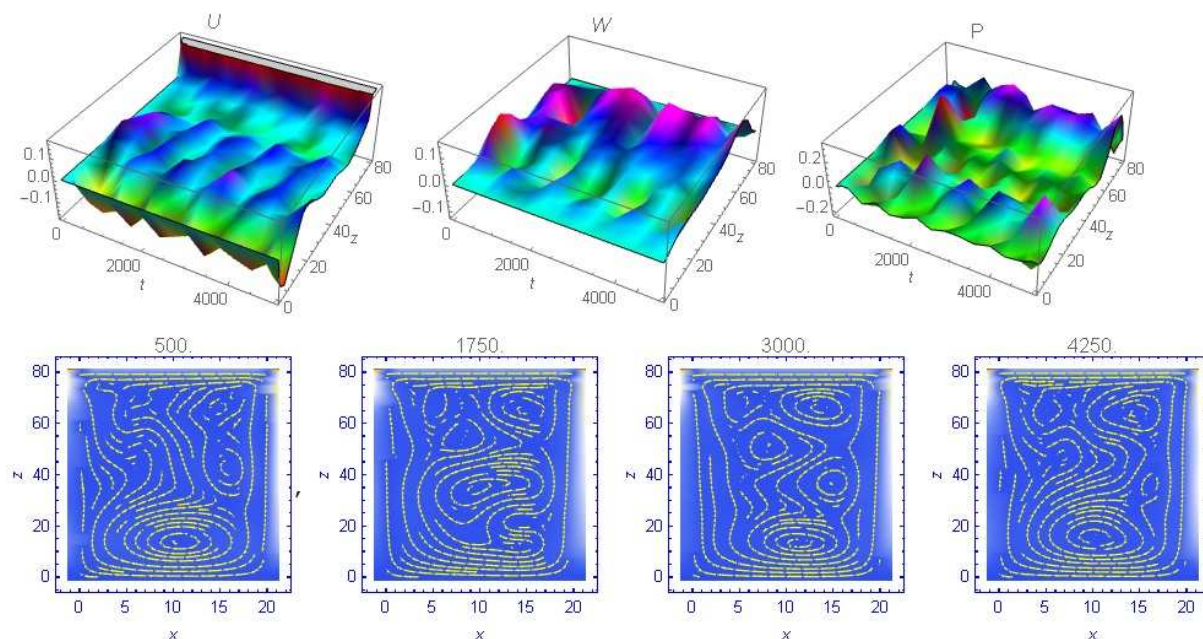


Рис. 5. Турбулентное течение в глубокой полости: сверху - пространственно-временное распределение составляющих скорости течения и давления в сечении $x = L_x / 2$; внизу – линии тока течения, иллюстрирующие вихревой характер течения. Параметры модели (19)-(21): $L_x = 20, L_z = 80, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 2 \cdot 10^4$.

Численная модель 3D течения в полости

Рассмотрим трехмерное нестационарное течение в полости в форме кубоида с одной открытой гранью – рис. 6. Запишем уравнение (18) для этого случая в форме

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= \nu \nabla^2 u + \frac{1}{\rho_0} \nabla_x (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v &= \nu \nabla^2 v + \frac{1}{\rho_0} \nabla_y (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w &= \nu \nabla^2 w + \frac{1}{\rho_0} \nabla_z (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v}))
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Здесь мы полагаем все функции зависящими от времени и трех координат $u = u(t, x, y, z), v = v(t, x, y, z), w = w(t, x, y, z), \mathbf{v} = (u, v, w)$. Сформулируем задачу о течении в области $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$ при заданной скорости внешнего потока $\mathbf{v}_0(t, x, y)$ на верхней границе полости:

$$\begin{aligned} u(0, x, y, z) = 0, v(0, x, y, z) = 0, w(0, x, y, z) = 0, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z; \\ u(t, 0, y, z) = u(t, L_x, y, z) = 0, u(t, x, 0, z) = u(t, x, L_y, z) = 0, \\ v(t, 0, y, z) = v(t, L_x, y, z) = 0, v(t, x, 0, z) = v(t, x, L_y, z) = 0, \\ w(t, 0, y, z) = w(t, L_x, y, z) = 0, w(t, x, 0, z) = w(t, x, L_y, z) = 0, \\ u(t, x, y, 0) = v(t, x, y, 0) = w(t, x, y, 0) = 0, \\ u(t, x, y, L_z) = u_0(t, x, y), v(t, x, y, L_z) = v_0(t, x, y), w(t, x, y, L_z) = w_0(t, x, y). \end{aligned} \quad (25)$$

Ниже в расчетах мы использовали следующие функции, описывающие внешнее течение:

$$\begin{aligned} u_0 = U_0(1 - e^{-t}) \tanh(kx) \tanh[k(L_x - x)] \tanh(ky) \tanh[k(L_y - y)], \\ v_0 = 0, w_0 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Такая форма профиля позволяет согласовать начальные и граничные условия (25). На рис. 6 представлены данные моделирования течения в кубоиде с параметрами $L_x = 20, L_y = 25, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 10^4$ и в прямоугольной полости с параметрами как на рис.2, что соответствует сечению кубоида $y = L_y / 2$, на момент времени $t = 100$.

Из приведенных на рис. 6 данных следует, что при ускорении внешнего потока в полости формируется нестационарное вихревое течение, которое в сечении кубоида $y = L_y / 2$ соответствует двумерному течению в прямоугольной полости – рис.2. Различия в параметрах трехмерного и плоского течения составляет не более 1%. Это объясняется тем, что в модели (24)-(26) из-за наличия малой по величине сдвиговой вязкости в объеме полости формируется своеобразное почти двумерное течение – рис.7.

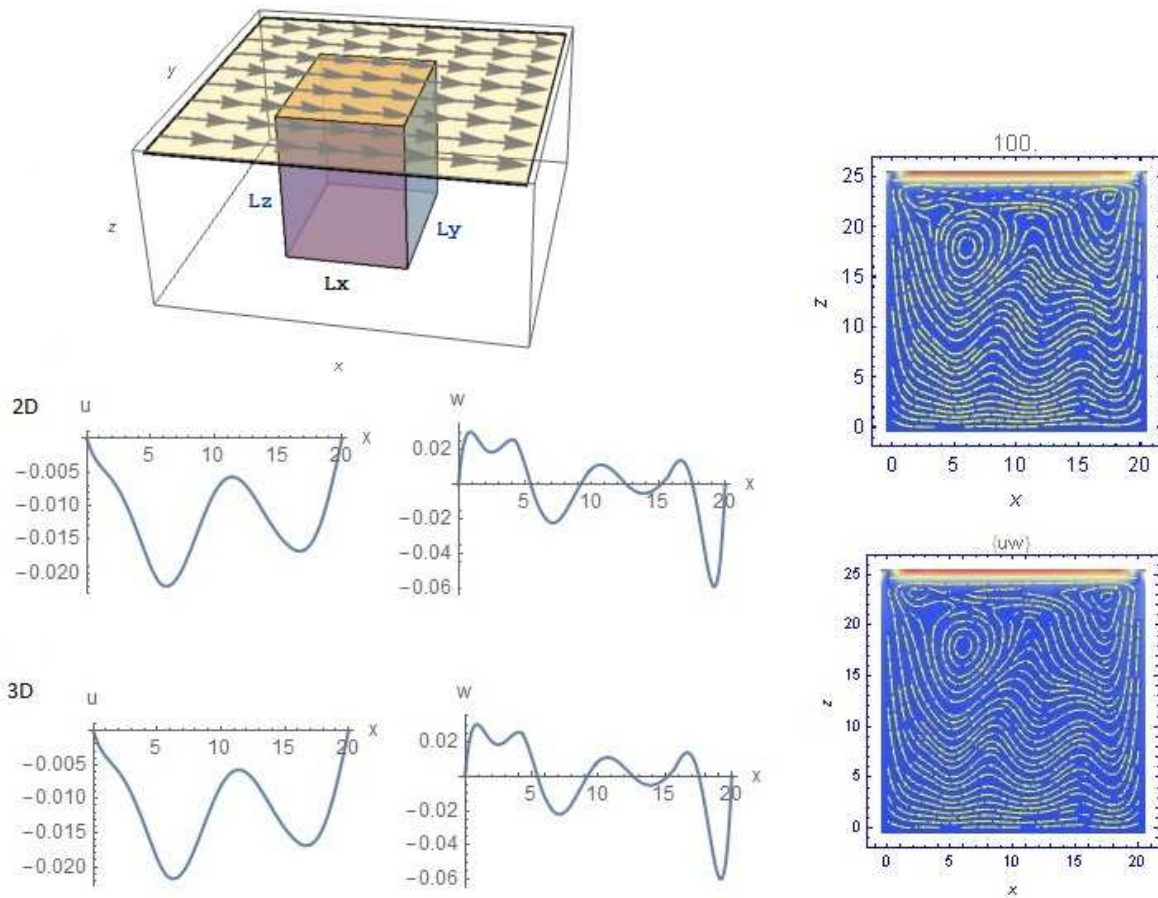


Рис. 6. Сравнение параметров турбулентного течения в прямоугольной полости (вверху) и в кубоиде в сечении $y = L_y/2$ (внизу). Параметры модели (24)-(26): $L_x = 20, L_y = 25, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 10^4$.

Отметим, что между компонентами скорости в объеме полости за пределами пограничного слоя выполняется соотношение $v^2 \ll u^2 + w^2$. Полученные результаты моделирования турбулентного течения в кубоиде, представленные на рис. 6-7, позволяют отобразить трехмерное течение в кубоиде в двумерном приближении в рамках модели (19)-(21) с известной оценкой, указанной выше.

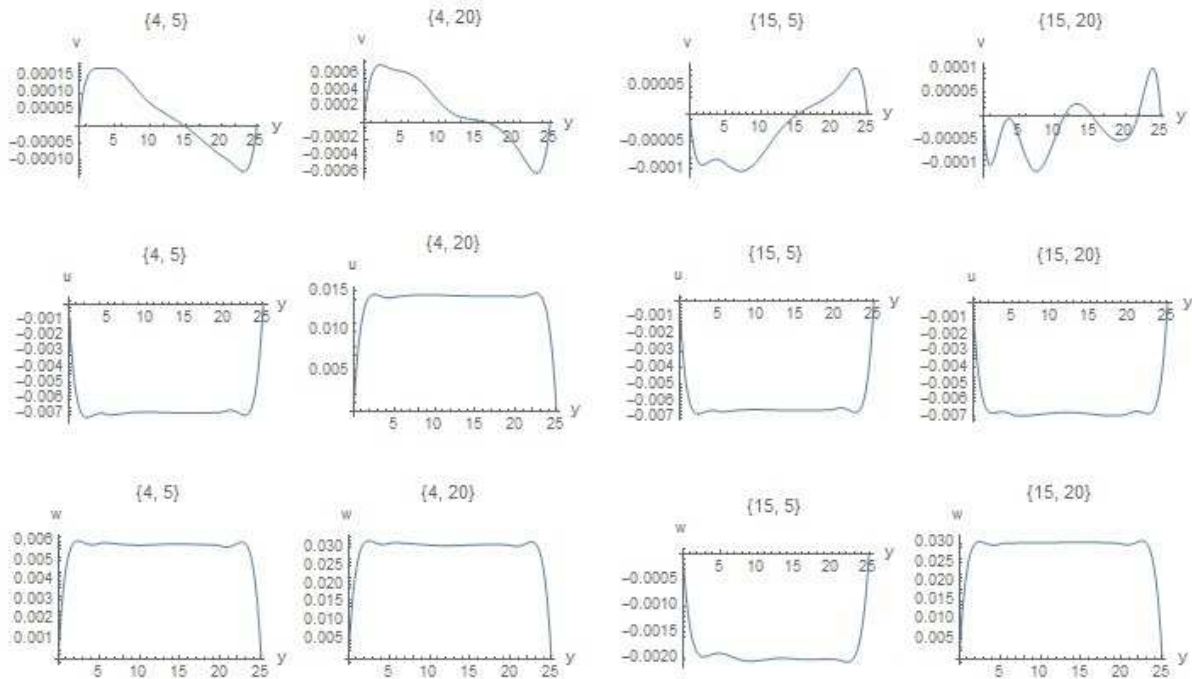


Рис. 7. Профили скорости турбулентного течения в кубоиде в различных сечениях $\{x = a, z = b\}$ (значения $\{a, b\}$ указаны над рисунками): $L_x = 20, L_y = 25, L_z = 25, U_0 = 1, k = 100, \nu = 0.001, \mu_T / \mu = 10^4$.

Используем выражение турбулентной вязкости из модели (7)

$$\mu_T / \mu = 1 + n^2 L^2 / h^2 \tag{27}$$

Здесь L – характерный масштаб течения, h, n – параметры шероховатости. В случае турбулентного течения в кубоиде с гладкими стенками следует положить $L = \max\{L_x, L_y, L_z\} / 2, h / n \approx 8.71 \nu / u_*$ [3-4]. Подставляя указанные выражения в (27), находим

$$\mu_T / \mu \approx 1 + 0.013 L^2 u_*^2 / \nu^2 \tag{28}$$

В случае воздуха при температуре 20С имеем $\nu = 1.506 \cdot 10^{-5} m^2 / s$, следовательно, для $L = 0.03 m, u_* = 0.01 m / s$ находим из (28), что

$\mu_T / \mu \approx 1.74 \cdot 10^4$. Это приблизительно соответствует значению этого параметра, которое использовалось в тестовых примерах, приведенных выше.

Наконец, заметим, что развитые модели турбулентных течений могут быть использованы в моделировании микроклимата и загрязнения воздуха в городской среде [1-4, 20-21].

Библиографический список

1. Trunев A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
2. Trunев A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
3. Trunев A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
4. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.
5. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.
6. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.
7. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>
8. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// УМН, -2003., - Т. 58, - №2 (350), - С. 45-78.
9. Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.
10. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал, Том 13, №4 (50), 2013.
11. Давлатов Ш.О. Существование единственного гладкого решения уравнения Навье-Стокса//arXiv:1603.09665 (math.GM)

12. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
13. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
15. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
16. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск, Наука, 1982.
17. Довгаль А.В., Козлов В.В., Симонов О.А. Возбуждение звуком колебаний пограничного слоя на скользящем крыле// Ученый записки ЦАГИ, Т. XX, №6, 1989.
18. Brandes M., Ronneberger D. Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators// AIAA 95-126/ p. 893-901, 1995.
19. Auregan Y., Leroux M. On acoustic instability phenomena in the vicinity of a lined wall exposed to a grazing flow//arXiv:0809.3713v1, 22 Sep, 2008.
20. Lukashina N.S., Trunev A. P. Principles of Recreation Ecology and Natural Economics. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 273 p., 1999 (in Russian).
21. Trunev A. P. Similarity theory and model of turbulent dusty gas flow over large-scale roughness/ Int. Conf. On Urban Air Quality: Monitoring and Modelling, University of Hertfordshire, Institute of Physics, London, p. 3.8, 1996.

References

1. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
2. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
3. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
4. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
5. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.
6. Trunev A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.
7. Trunev A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjazkosti i modelirovanie turbulentnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal

KubGAU) [Elektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

8. Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie i gladkost'// UMN, -2003., - T. 58, - №2 (350), - S. 45-78.

9. Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.

10. Otelbaev M. Sushhestvovanie sil'nogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa// Matematicheskij zhurnal, Tom 13, №4 (50), 2013.

11. Davlatov Sh.O. Sushhestvovanie edinstvennogo gladkogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa//arXiv:1603.09665 (math.GM)

12. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.

13. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.

14. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

15. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.

16. Kachanov Ju.S., Kozlov V.V., Levchenko V.Ja. Vozniknovenie turbulentnosti v pogranichnom sloe. – Novosibirsk, Nauka, 1982.

17. Dovgal' A.V., Kozlov V.V., Simonov O.A. Vozbuzhdenie zvukom kolebanij pogranichnogo sloja na skol'zjashhem kryle// Uchenyj zapiski CAGI, T. HH, №6, 1989.

18. Brandes M., Ronneberger D. Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators// AIAA 95-126/ p. 893-901, 1995.

19. Auregan Y., Leroux M. On acoustic instability phenomena in the vicinity of a lined wall exposed to a grazing flow//arXiv:0809.3713v1, 22 Sep, 2008.

20. Lukashina N.S., Trunev A. P. Principles of Recreation Ecology and Natural Economics. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 273 p., 1999 (in Russian).

21. Trunev A. P. Similarity theory and model of turbulent dusty gas flow over large-scale roughness/ Int. Conf. On Urban Air Quality: Monitoring and Modelling, University of Hertfordshire, Institute of Physics, London, p. 3.8, 1996.